COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les involutions cycliques du cinquième ordre appartenant à une surface algébrique,

par Lucien Godeaux, correspondant de l'Académie

Nous nous proposons d'étudier dans cette note les points unis isolés des involutions cycliques du cinquième ordre appartenant à une surface algébrique. Ces points unis sont de trois sortes : points unis parfaits, points unis non parfaits possédant un point uni parfait dans le domaine du premier ordre, points unis non parfaits symétriques [1]. Nous avons déjà étudié les points unis des deux premières sortes et ce sont les points unis de la troisième sorte que nous étudions ici. On peut construire, sur une surface F contenant une involution cyclique I_5 d'ordre cinq, des systèmes linéaires contenant cinq systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution. Nous étudions le com-

[1] Au sujet des résultats sur les involutions appartenant à une surface algébrique que nous utilisons ici, voir notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Actualités scientifiques et industrielles*, n° 270; Paris, Hermann, 1935). Voir aussi nos mémoires *Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Mémoires in-8° de l'Académie roy. de Belgique*, 1938, pp. 1-44), *Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation* (*Annales de l'Ecole Normale supérieure*, 1938, pp. 193-222).

portement des courbes de ces systèmes en un point uni non parfait symétrique de l'involution et le comportement des courbes correspondantes au point de diramation homologue de la surface image de l'involution. Nous appliquons ensuite les résultats obtenus au cas d'une involution d'ordre cinq et de genres un appartenant à une surface de genres un, involution qui ne peut posséder que des points unis non parfaits symétriques. Enfin, profitant d'un résultat récent de M. Severi, nous démontrons qu'une involution d'ordre premier et de genres un appartenant à une surface de genres un, a l'ordre au plus égal à sept, complétant ainsi un résultat obtenu antérieurement.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution I_5 d'ordre cinq, cyclique, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous pouvons prendre comme modèle projectif de la surface F une surface F de l'espace S_r d'ordre $5n$, à sections hyperplanes de genre $5\pi-4$, sur laquelle l'involution I_5 est engendrée par une homographie T de S_r, cyclique de période cinq, possédant cinq axes ponctuels $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, ..., $S^{(5)}$ dont le premier seul rencontre la surface.

Le système $|C|$ des sections hyperplanes de F contient cinq systèmes linéaires partiels $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_5|$ composés au moyen de l'involution I_5, le système $|C_i|$ étant découpé par les hyperplans passant par les axes ponctuels $S^{(1)}$, ..., $S^{(i-1)}$, $S^{(i+1)}$, ..., $S^{(5)}$ de l'homographie T. Le système $|C_1|$ est donc dépourvu de points-base, alors que les systèmes $|C_2|$, ..., $|C_5|$ ont pour points-base les points unis de l'involution I_5.

Soit r_1 la dimension du système $|C_1|$. En rapportant projectivement les courbes C_1 aux hyperplans d'un espace linéaire à r_1 dimensions, il correspond à la surface F une surface Φ, image de l'involution I_5, d'ordre n, à sections hyperplanes de genre π. Nous désignerons par $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$, ..., $|\Gamma_5|$ les systèmes linéaires (complets) qui correspondent sur la surface Φ aux systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_5|$

respectivement, par r_1, r_2, ..., r_5 leurs dimensions. Les sections hyperplanes de la surface Φ sont donc les courbes Γ_1.

2. Soit A un point uni de l'involution I_5. Le plan tangent α à la surface F en A est uni pour l'homographie T et rencontre l'axe $S^{(1)}$ de cette homographie au seul point A.

Trois cas peuvent se présenter :

1° Le point A est uni parfait. Le plan α coupe alors suivant une droite l'un des axes $S^{(2)}$, ..., $S^{(5)}$ de l'homographie T;

2° Le point A est uni non parfait de première espèce. Le plan α s'appuie en un point sur deux des espaces $S^{(2)}$, ..., $S^{(5)}$; il existe dans le plan α deux droites unies passant par A pour l'homographie T et le point de F infiniment voisin de A sur l'une de ces droites est uni parfait pour l'involution I_5. Les courbes C_1 passant par A ont la multiplicité trois en ce point et un point double infiniment voisin de A;

3° Le point A est uni non parfait symétrique. Le plan α s'appuie en un point sur deux des axes $S^{(2)}$, ..., $S^{(5)}$ de T; pour fixer les idées, nous supposerons que ce plan s'appuie en un point A_2' sur $S^{(2)}$ et en un point A_3' sur $S^{(3)}$. Le point A_2 de F, infiniment voisin de A sur la droite AA_2', est uni non parfait pour I_5. A ce point sont infiniment voisins, dans une direction, deux points unis A_{22}, A_{222} et dans une autre direction, un point uni A_{23}; les points A_{222} et A_{23} sont unis parfaits pour I_5. De même, le point A_3 de F, infiniment voisin de A sur la droite AA_3', est uni non parfait pour I_3; à ce point sont infiniment voisins, dans une direction, deux points unis successifs A_{33}, A_{333} dont le dernier est uni parfait, dans une autre direction, un point uni parfait A_{32}.

Les courbes C_1 passant par A, courbes que nous désignerons par C_1', ont en A un point double et passent par les points A_2, A_{22}, A_{222} et A_3, A_{33}, A_{333}.

Les courbes C_1', assujetties à toucher, en A, une droite distincte de AA_2', AA_3', ont un point quadruple en A et passent simplement par les points A_2, A_{23} et A_3, A_{32}. Nous désignerons ces courbes par C_1''.

Soit A' le point de diramation de la surface Φ qui correspond au point uni A. Le point A' est double biplanaire pour la surface Φ et celle-ci possède en outre, dans le domaine du premier ordre de A', un point double biplanaire ordinaire.

La singularité de la surface Φ en A' est équivalente, au point de vue des transformations birationnelles, à un ensemble de quatre courbes rationnelles de degré -2, que nous désignerons par γ_2, γ_2', γ_3', γ_3; elles correspondent respectivement aux domaines des points unis parfaits A_{222}, A_{23}, A_{32}, A_{333} de F. Chacune de ces courbes rencontre en un point la précédente et la suivante, mais ne rencontre pas les autres.

Aux courbes C_1' correspondent sur Φ les courbes

$$\Gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_2' - \gamma_3' - \gamma_3$$

et aux courbes C_1'', les courbes

$$\Gamma_1 - \gamma_2 - 2(\gamma_2' + \gamma_3') - \gamma_3.$$

Aux groupes de I_5 formés de points infiniment voisins de A correspond sur la surface Φ le point commun aux courbes γ_2', γ_3'.

Dans cette note, nous ne considérons que des points unis de la troisième catégorie [1].

3. Les hyperplans passant par les axes $S^{(1)}$, $S^{(3)}$, $S^{(4)}$, $S^{(5)}$ de l'homographie T, ne contiennent pas le plan tangent à F en A; ils découpent sur la surface F des courbes C_2 ayant un point simple en A et passant par les points A_3, A_{33}, A_{333}.

---

[1] On trouvera la théorie des points unis de la troisième catégorie dans nos *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique*, 1931, pp. 1131-1150).

Les courbes Γ_2 correspondant aux courbes C_2 sur la surface Φ rencontrent donc en un point la courbe γ_3, mais ne rencontre pas les courbes γ_2, γ_2', γ_3'.

Entre les courbes Γ_1, Γ_2, nous avons une relation fonctionnelle de la forme

$$5\Gamma_1 \equiv 5\Gamma_2 + \lambda_2\gamma_2 + \lambda_2'\gamma_2' + \lambda_3'\gamma_3' + \lambda_3\gamma_3 + \Delta_2,$$

où Δ_2 provient des points de diramation de la surface Φ distincts de A' et où λ_2, λ_2', λ_3', λ_3 sont des entiers. En exprimant que les courbes Γ_2 rencontrent γ_3 en un point et ne rencontrent pas γ_2, γ_2', γ_3', on trouve

$$\lambda_2 = 1, \ \lambda_2' = 2, \ \lambda_3' = 3, \ \lambda_3 = 4.$$

On a donc

$$5\Gamma_1 \equiv 5\Gamma_2 + \gamma_2 + 2\gamma_2' + 3\gamma_3' + 4\gamma_3 + \Delta_2.$$

De même, les courbes C_3 ont un point simple en A et passent par les points A_2, A_{22}, A_{222}. Les courbes Γ_3 qui leur correspondent sur Φ rencontrent en un point la courbe γ_2 mais ne rencontrent pas les courbes γ_2', γ_3', γ_3. On a

$$5\Gamma_1 \equiv 5\Gamma_3 + 4\gamma_2 + 3\gamma_2' + 2\gamma_3' + \gamma_3 + \Delta_3,$$

Δ_3 provenant de la présence d'autres points de diramation.

4. Désignons par $|D| = |2\,C|$ le double du système $|C|$. Ce système contient également cinq systèmes linéaires partiels $|D_1|$, $|D_2|$, ..., $|D_5|$ composés au moyen de l'involution I_5. L'un de ces systèmes, $|D_1|$, contient les courbes $2\,C_1$ et est dépourvu de points-base. Nous pouvons définir les autres systèmes en supposant qu'ils contiennent respectivement les courbes $C_1 + C_2$, $C_1 + C_3$, $C_1 + C_4$ et $C_1 + C_5$.

Les courbes $C_2 + C_3$ ont en A un point double et passent simplement par les points A_2, A_{22}, A_{222}, A_3, A_{33}, A_{333}; ces courbes appartiennent donc au système des courbes D_1 passant par A, c'est-à-dire au système $|2\,C_1|$.

Observons maintenant que dans l'espace S_r, les invariants absolus de l'homographie T sont les racines primitives cinquièmes de l'unité. Si ε désigne une de ces racines, nous pouvons donc attacher aux systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_5|$, dans un certain ordre, les nombres 1, ε, ε^2, ε^3, ε^4. Si nous attachons le nombre 1 au système $|C_1|$, les nombres attachés aux systèmes $|C_2|$, $|C_3|$ doivent avoir pour produit l'unité. Aux systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_5|$, nous attacherons donc respectivement soit les nombres 1, ε, ε^4, ε^2, ε^3, soit les nombres 1, ε^2, ε^3, ε^4, ε. Dans les deux cas, les courbes $C_4 + C_5$ appartiennent au système $|D_1|$.

5. Les courbes $C_4 + C_5$ sont évidemment comprises parmi les courbes D_1 passant par le point A. D'autre part, les courbes C_4 et C_5 sont découpées sur F par des hyperplans contenant le plan tangent α à F en A; elles ont donc un point au moins double en A. Il en résulte que les courbes $C_4 + C_5$ ont en A un point quadruple au moins, c'est-à-dire au moins la singularité des courbes C_1''.

Observons que le système $|D_4|$, qui contient les courbes $C_1 + C_4$, contient également les courbes $2\,C_2$, qui ont en A un point double auquel sont infiniment voisins successifs trois points doubles A_3, A_{33}, A_{333}. On en conclut que les courbes C_4 ont un point double en A. Il en est de même des courbes C_5.

Les courbes $2\,C_2$ sont évidemment des courbes D_4 particulières et par conséquent les courbes C_4 ont un point double en A et passent simplement par les points A_3, A_{32}, infiniment voisins successifs de A. De même, les courbes C_5 ont un point double en A auquel sont infiniment voisins successifs deux points simples A_2, A_{23}. Les courbes $C_4 + C_5$ ont le même comportement en A que les courbes C_1''.

Aux courbes C_4 correspondent sur la surface Φ des courbes Γ_4 rencontrant en un point la courbe γ_3' mais ne rencontrant pas les courbes γ_2, γ_2', γ_3. On a donc

$$5\Gamma_1 \equiv 5\Gamma_4 + 2\gamma_2 + 4\gamma_2' + 6\gamma_3' + 3\gamma_3 + \Delta_4,$$

Δ_4 provenant des autres points de diramation de la surface Φ.

Pour les courbes Γ_5 qui correspondent aux courbes C_5, on trouve de même

$$5\Gamma_1 \equiv 5\Gamma_5 + 3\gamma_2 + 6\gamma_2' + 4\gamma_3' + 2\gamma_3 + \Delta_5.$$

Observons que le point A absorbe quatre points d'intersection de deux courbes C_2 ou de deux courbes C_3 et six points d'intersection de deux courbes C_4 ou de deux courbes C_5.

6. Nous allons appliquer les résultats précédents aux involutions cycliques d'ordre cinq et de genres un ($p_a = P_4 = 1$) appartenant à une surface de genres un, involutions dont nous avons prouvé l'existence dans un travail récent(¹). Si F et Φ sont de genres un, l'involution I_5 possède quatre points unis $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, $A^{(4)}$ qui sont nécessairement du type étudié dans cette note.

Le système linéaire $|\Gamma_1|$ est de genre π, de degré $n = 2\pi - 2$ et de dimension $r_1 = \pi$.

Les courbes Γ_2 découpent, sur une courbe Γ_1, une série d'ordre $2\pi - 2$ qui ne peut être la série canonique, puisque le système $|\Gamma_1|$ est son propre adjoint. Cette série a donc la dimension $\pi - 2$ et on a $r_2 \leqslant \pi - 2$. De même, on a $r_3 \leqslant \pi - 2$, $r_4 \leqslant \pi - 2$, $r_5 \leqslant \pi - 2$. Sur la surface F, le système $|C|$, de genre $5\pi - 4$, a le degré $10(\pi - 1)$ et la dimension $r = 5\pi - 4$. D'après la théorie des homographies, on a

$$r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = 4(\pi - 2).$$

Par conséquent, les systèmes $|\Gamma_2|$, ..., $|\Gamma_5|$ ont la dimen-

(¹) *Remarques sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces de genres un* (*Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique*, 1934, pp. 851-859).

sion $\pi-2$. Ces systèmes étant complets, ont le degré $2\pi-6$ et le genre $\pi-2$.

7. Désignons par γ_{i2}, γ'_{i2}, γ'_{i3}, γ_{i3} l'ensemble des courbes rationnelles de degré -2 équivalentes, au point de vue des transformations birationnelles, au point de diramation de la surface Φ correspondant au point uni $A^{(i)}$.

Nous poserons, pour abréger

$$\begin{aligned}\varphi_{i2}&=\gamma_{i2}+2\gamma'_{i2}+3\gamma'_{i3}+4\gamma_{i3},\\ \varphi_{i3}&=4\gamma_{i2}+3\gamma'_{i2}+2\gamma'_{i3}+\gamma_{i3},\\ \varphi_{i4}&=2\gamma_{i2}+4\gamma'_{i2}+6\gamma'_{i3}+3\gamma_{i3},\\ \varphi_{i5}&=3\gamma_{i2}+6\gamma'_{i2}+4\gamma'_{i3}+2\gamma_{i3}.\end{aligned}$$

Les courbes C_2 par exemple, n'auront pas le même comportement en chacun des quatre points unis; elles auront par exemple en ν de ces points un point simple (avec trois points simples infiniment voisins successifs) et aux $4-\nu$ points restants, un point double (avec deux points simples infiniment voisins successifs). Les courbes C_2 seront donc de genre $5\pi+\nu-8$ et le système $|C_2|$ aura le degré effectif $10\pi+2\nu-34$. Le système $|\Gamma_2|$ ayant le degré $2\pi-6$, on doit avoir $\nu=2$.

D'ailleurs, l'involution I_5 détermine sur une courbe C_2 une involution possédant quatre points unis. La formule de Zeuthen donne

$$10(\pi-3)+4.4=10\pi+2\nu-18,$$

d'où également $\nu=2$.

On arrive évidemment à des conclusions analogues pour les courbes C_3, C_4, C_5.

Nous pouvons disposer des notations de manière à avoir la relation fonctionnelle

$$5\Gamma_1\equiv5\Gamma_2+\varphi_{12}+\varphi_{22}+\varphi_{34}+\varphi_{44}.$$

Les courbes C_2+C_3 appartenant au système $|2\,C_1|$, nous avons

$$2\Gamma_1\equiv\Gamma_2+\Gamma_3+\varphi_1'+\varphi_2'+\varphi_3''+\varphi_4'',$$

en posant

$$\varphi_i' = \gamma_{i2} + \gamma'_{i2} + \gamma'_{i3} + \gamma_{i3}, \quad \varphi_i'' = \gamma_{i2} + 2\gamma'_{i2} + 2\gamma'_{i3} + \gamma_{i3}.$$

On en déduit la relation fonctionnelle

$$5\Gamma_1 \equiv 5\Gamma_3 + \varphi_{13} + \varphi_{23} + \varphi_{35} + \varphi_{45}.$$

Le plan tangent en $A^{(1)}$ à la surface F s'appuie en un point sur chacun des axes $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ de l'homographie T; il en est de même du plan tangent à F au point $A^{(2)}$. Les plans tangents à F aux points $A^{(3)}$, $A^{(4)}$ s'appuient chacun en un point sur chacun des espaces $S^{(3)}$, $S^{(4)}$.

On peut écrire, en vertu de ce qui précède,

$$5\Gamma_1 \equiv 5\Gamma_4 + \varphi_{14} + \varphi_{24} + \varphi_{32} + \varphi_{42}$$

et, à cause de la relation

$$2\Gamma_1 \equiv \Gamma_4 + \Gamma_5 + \varphi_1'' + \varphi_2'' + \varphi_3' + \varphi_4',$$
$$5\Gamma_1 \equiv 5\Gamma_5 + \varphi_{15} + \varphi_{25} + \varphi_{33} + \varphi_{43}.$$

On sait que parmi les hypersurfaces découpant sur Φ les courbes du système $|5\Gamma_1|$, il en existe qui ont avec Φ un contact du quatrième ordre le long d'une courbe Γ_2, Γ_3, Γ_4 ou Γ_5 quelconque.

8. Dans une note sur l'ordre des correspondances rationnelles entre deux surfaces de genres un [1], nous avons montré que s'il existe une involution (nécessairement cyclique) d'ordre p premier et de genres un sur une surface de genres un, on a

$$24\,\frac{p-1}{p+1} \leqslant \rho - 1\,,$$

ρ étant le nombre-base de la surface image de l'involution. Nous avions pris 21 comme valeur maximum de p. Or,

[1] *Sur l'ordre des correspondances rationnelles entre deux surfaces de genres un* (*Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique*, 1935, pp. 345-353).

dans un mémoire récent (1), M. Severi a démontré que l'on a $\rho \leqslant 20$; on en déduit que l'on ne peut avoir que les valeurs $p=2$, $p=3$, $p=5$ ou $p=7$.

Liége, le 17 janvier 1939.

---

(1) *Relazioni fra i periodi degli integrali multipli d'una varietà algebrica* (*Memorie della R. Accad. d'Italia*, 1938, pp. 121-146). Voir p 144.