Extrait des Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège,
Séance du 15 avril 1943. — N° 4.

Sur quelques points de la théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Nous apportons, dans cette note, quelques compléments à nos recherches sur les involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique [1]. Le problème que nous avons en vue est le comportement, en un point uni, des courbes d'un système appartenant à l'involution, privé de point-base, assujetties à la condition de passer par ce point [2].

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p, d'ordre premier p ($p > 2$), n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous pouvons prendre comme modèle projectif de F une surface normale d'un espace S_r sur laquelle I_p est engendrée par une homographie H de période p, possédant p axes ponctuels $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ dont un seul, σ_1, rencontre la surface (aux points unis).

Désignons par $|C|$ le système des sections hyperplanes de F.

---

(1) Voir notre exposé sur : Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Actualités scientifiques et industrielles*, Paris, Hermann, 1935); Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1930, pp. 450-467; 1931, pp. 1131-1150, 1356-1365; 1935, pp. 338-344; 1938, pp. 255-258); Recherches sur les involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions (*Annales de l'École normale supérieure*, 1937, pp. 55-79); Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation (*idem*, 1938, pp. 193-222); Sur la structure des points unis appartenant à une surface algébrique (*Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique*, 1938, pp. 1-44); Sur les points unis des involutions d'ordre p^2 appartenant à une surface algébrique (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1940, pp. 28-43, 100-110, 115-128); Sur les points de diramation des surfaces multiples (*Bull. de la Soc. roy. des Sciences de Liège*, 1940, pp. 54-79, 128-137); Remarques sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation (*Bull. des Sciences mathématiques*, 1940, pp. 245-256); Sur la structure des points unis des homographies cycliques du plan (*Mém. in-8° de l'Acad. roy. de Belgique*, 1941, pp. 1-42).

(2) Un mémoire récent de M. S. LILLEY, On the isolated united points of a cyclic involution of an algebric surface (*Proc. London Math. Society*, 1940, pp. 312-360) traite des mêmes questions. Nous ne connaissons ce travail que par le résumé qu'en a donné le *Zentralblatt für Mathematik*, 1942, t. 25, pp. 214-215.

Le système $|C|$ contient p systèmes linéaires partiels $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_p|$ appartenant à l'involution I_p, le système $|C_i|$ étant découpé par les hyperplans passant par les axes de H sauf par σ_i.

Le système $|C_1|$ est dépourvu de points-base et l'on peut supposer sa dimension aussi grande qu'on le veut, quitte à remplacer $|C|$ par un de ses multiples. Si r_1 est la dimension de $|C_1|$, en rapportant projectivement les courbes C_1 aux hyperplans d'un espace linéaire à r_1 dimensions, aux points de F correspondent ceux d'une surface normale Φ, image de l'involution I_p, sur laquelle les points de diramation sont isolés.

Soit A un point uni non parfait de l'involution I_p. Le plan tangent α à F en A ne rencontre l'axe σ_1 qu'au point A; il s'appuie en un point sur deux des axes $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_p$, par exemple, en un point sur σ_2 et en un point sur σ_3. Soient t_3, t_2 les droites joignant ces points au point A.

Les hyperplans passant par $\sigma_1, \sigma_3, \ldots, \sigma_p$ découpent sur F les courbes C_2; celles-ci ont un point simple en A et y touchent la droite t_2. En général, les courbes C_2 ont en A un contact d'un certain ordre supérieur au premier. Nous supposerons qu'elles ont en commun une suite de h_2 points infiniment voisins successifs de A ($h \geqslant 1$). Ces points sont unis pour l'involution I_p et le dernier, que nous désignerons par A_2, est uni parfait pour cette involution.

Les hyperplans passant par $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4, \ldots, \sigma_p$ découpent sur F les courbes C_3, ayant un point simple en A et y touchant la droite t_3. Nous supposerons que les courbes C_3 ont en commun une suite de h_3 points infiniment voisins successifs de A. Ces points sont unis pour I_p et le dernier, A_3, est uni parfait.

2. Désignons par C_1' les courbes C_1 passant par A. Ces courbes ont en ce point une certaine multiplicité ρ et comme tangentes, les droites t_2, t_3. Les courbes C_1' passent avec certaines multiplicités par les points unis de I_p situés dans le domaine du point A.

Nous supposerons que les courbes C_1' passent respectivement $\rho_{21}, \rho_{22}, \ldots, \rho_{2h_2}$ fois par les h_2 points infiniment voisins successifs de A situés sur les courbes C_2 et respectivement $\rho_{31}, \rho_{32}, \ldots, \rho_{3h_3}$ fois par les h_3 points infiniment voisins successifs de A appartenant aux courbes C_3. On a

$$\rho > \rho_{21} \geq \rho_{22} \geq \cdots \geq \rho_{2h_2},$$
$$\rho > \rho_{31} \geq \rho_{32} \geq \cdots \geq \rho_{3h_3}.$$

Les courbes C_1' ont en général d'autres branches d'origine A qui sont, les unes tangentes à t_2, les autres à t_3.

Les points de ces branches appartenant à toutes les courbes C_1' sont unis pour l'involution I_p et chaque branche se termine par un point fixe uni parfait pour I_p. Nous désignerons par $A_{21}, A_{22}, \ldots, A_{2k_2}$ les points unis parfaits de I_p, fixes, appartenant à des branches des courbes C_1' tangentes à t_2 en A, par $\nu_{21}, \nu_{22}, \ldots, \nu_{2k_2}$ leurs multiplicités pour ces courbes.

De même, nous désignerons par $A_{31}, A_{32}, \ldots, A_{3k_3}$ les points unis parfaits de I_p, fixes, appartenant aux branches des courbes C_1' tangentes à t_3 en A, par $\nu_{31}, \nu_{32}, \ldots, \nu_{3k_3}$ leurs multiplicités pour ces courbes.

Soit A′ le point de diramation de la surface Φ qui correspond à A. Désignons par Γ les sections hyperplanes de Φ, par Γ' celles de ces sections qui passent par A′. Les courbes Γ' ont en A′ la multiplicité

$$\gamma = \nu_{20} + \nu_{21} + \cdots \nu_{2k_2} + \nu_{30} + \nu_{31} + \cdots + \nu_{3k_3},$$

où l'on a posé $\nu_{20} = \rho_{2h_2}$, $\nu_{30} = \rho_{3h_3}$. Telle est donc également la multiplicité de A′ pour Φ.

Projetons Φ de A′ sur un hyperplan ne passant pas par A′; nous obtenons une surface Φ_1 sur laquelle, au domaine du point A′, correspond un ensemble de courbes rationnelles $\gamma_{20}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{2k_2}, \nu_{30}, \gamma_{31}, \ldots, \gamma_{3k_3}$ qui représentent les domaines des points $A_2, A_{21}, \ldots, A_{2k_2}, A_3, A_{31}, \ldots, A_{3k_3}$. Les sections hyperplanes de Φ_1 sont liées par une projectivité aux courbes C_1'.

3. Appelons Γ_2, Γ_3 les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes C_2, C_3. A un point commun à des courbes Γ', Γ_2 correspondent p points de F formant un groupe de I_p; donc les points communs à une courbe C_1' et à une courbe C_2 absorbés en A sont en nombre multiple de p. On a donc

$$\rho + \Sigma \rho_{2i} = \lambda_2 p \qquad (i = 1, 2, \cdots, h_2) \tag{1}$$

et de même

$$\rho + \Sigma \rho_{3i} = \lambda_3 p \qquad (i = 1, 2, \cdots, h_3), \tag{2}$$

λ_2 et λ_3 étant des entiers positifs. On va démontrer que $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Soient n l'ordre de Φ, π le genre des courbes Γ. La surface F est d'ordre pn et les courbes C sont de genre $p(\pi - 1) + 1$.

Désignons par R_2 la somme des carrés des multiplicités des points du domaine de A, communs à toutes les branches des courbes C_1' tangentes à t_2 en A, distincts des points appartenant aux courbes C_2, par R_2' la somme de ces multiplicités. Désignons de même par R_3 la somme des carrés des multiplicités des points du domaine de A, communs à toutes les branches des courbes C_1' tangentes à t_3 en A, non situées sur les courbes C_3, par R_3' la somme de ces multiplicités.

Le degré du système $|C_1'|$ est égal à

$$pn - \rho^2 - \Sigma\rho_{2i}^2 - \Sigma\rho_{3i}^2 - R_2 - R_3.$$

D'autre part, le degré de $|\Gamma'|$, qui correspond sur Φ au système $|C_1'|$, est égal à

$$n - \Sigma\nu_{2i} - \Sigma\nu_{3i}.$$

On a donc

$$\rho^2 + \Sigma\rho_{2i}^2 + \Sigma\rho_{3i}^2 + R_2 + R_3 = p(\Sigma\nu_{2i} + \Sigma\nu_{3i}). \tag{3}$$

Le genre des courbes C_1' est égal à

$$p(\pi - 1) + 1 - \frac{1}{2}\rho(\rho - 1) - \frac{1}{2}\Sigma\rho_{2i}(\rho_{2i} - 1) - \frac{1}{2}\Sigma\rho_{3i}(\rho_{3i} - 1)$$
$$- \frac{1}{2}(R_2 + R_3 - R_2' - R_3').$$

Le genre des courbes Γ' est égal à

$$\pi - \Sigma\nu_{2i} - \Sigma\nu_{3i} + 1.$$

On remarquera, en effet, que si l'on range les courbes γ dans l'ordre

$$\gamma_{3k_3}, \ldots, \gamma_{31}, \gamma_{30}, \gamma_{20}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{2k_2},$$

deux courbes consécutives ont un point commun et deux courbes non consécutives ne se rencontrent pas.

Deux courbes Γ', C_1' homologues sont liées par une correspondance $(1, p)$ et les points de rencontre de Γ' avec les courbes γ sont des points de diramation pour cette correspondance. La formule de Zeuthen donne donc

$$(p + 1)(\Sigma\nu_{2i} + \Sigma\nu_{3i}) - 2p = \rho(\rho - 1) + \Sigma\rho_{2i}(\rho_{2i} - 1)$$
$$+ \Sigma\rho_{3i}(\rho_{3i} - 1) + R_2 + R_3 - R_2' - R_3'.$$

En tenant compte de la relation (3), on obtient

$$\rho + \Sigma\rho_{2i} + \Sigma\rho_{3i} + R_2' + R_3' = 2p - \Sigma\nu_{2i} - \Sigma\nu_{3i}. \tag{4}$$

En tenant compte de la relation (1), (4) donne

$$\lambda_2 p + \Sigma\rho_{3i} + R_2' + R_3' = 2p - \Sigma\nu_{2i} - \Sigma\nu_{3i}$$

ou

$$\Sigma\rho_{3i} + R'_2 + R'_3 = p(2-\lambda_2) - \Sigma\nu_{2i} - \Sigma\nu_{3i}.$$

On a donc nécessairement $\lambda_2 = 1$, car le premier membre ne peut être nul ($\rho_{31} \geqslant 1$).

Par la relation (2), on a de même

$$\Sigma\rho_{2i} + R'_2 + R'_3 = p(2-\lambda_3) - \Sigma\nu_{2i} - \Sigma\nu_{3i};$$

d'où $\lambda_3 = 1$.

On a donc

$$\rho + \Sigma\rho_{2i} = p, \quad \rho + \Sigma\rho_{3i} = p,$$

$$\Sigma\rho_{3i} + R'_2 + R'_3 = \Sigma\rho_{2i} + R'_2 + R'_3 = p - \Sigma\nu_{2i} - \Sigma\nu_{3i};$$

par suite

$$\Sigma\rho_{2i} = \Sigma\rho_{3i}.$$

4. Des relations précédentes, on déduit

$$R'_2 + R'_3 = \rho - \Sigma\nu_{2i} - \Sigma\nu_{3i}.$$

Observons que dans la somme R_2' figurent les termes de la somme $\Sigma\nu_{2i}$ pour $i=1, 2, \ldots, k_2$ et dans R_3' les termes de la somme $\Sigma\nu_{3i}$ pour $i=1, 2, \ldots, k_3$. On a donc

$$\nu_{20} + \nu_{30} + 2\Sigma\nu_{2i} + 2\Sigma\nu_{3j} \leq \rho \qquad (i = 1, 2, \cdots, h_2;\ j = 1, 2, \cdots, h_3).$$

L'égalité n'a d'ailleurs lieu que si $k_2 = k_3 = 0$, ou bien chacun des points A_{21}, A_{22}, ... est dans le domaine du premier ordre d'un des points communs à toutes les courbes C_2 et chacun des points A_{31}, A_{32}, ... est dans le domaine du premier ordre d'un des points communs à toutes les courbes C_3. On a, en effet, alors

$$\Sigma\nu_{2i} = R'_2 \qquad (i = 1, 2, \cdots, k_2),$$

$$\Sigma\nu_{3i} = R'_3 \qquad (i = 1, 2, \cdots, k_3).$$

5. Considérons un point P fixe appartenant à certaines branches des courbes C_1', dans le domaine du point A. Soit P_1 le point infiniment voisin de P appartenant aux courbes C_1.

S'il n'existe que des branches linéaires des courbes C_1' passant par P, le point P_1 aura la même multiplicité que P et à P_1 sera infiniment voisin un point P_2 de même multiplicité que P et P_1 pour les courbes C_1'.

S'il n'existe que des branches superlinéaires des courbes C_1' passant par P, les courbes C_1' auront un certain nombre θ de points infiniment voisins de P_1; ces points et le point P_1 auront une certaine multiplicité σ pour les courbes C_1' et P sera multiple d'ordre $(\theta+1)\sigma$ pour ces courbes.

S'il existe des branches linéaires et superlinéaires des courbes C_1' passant par P, les courbes C_1' auront θ points multiples d'ordre σ', infiniment voisins de P_1 dans une autre direction. Le point P_1 sera multiple d'ordre $\sigma+\sigma'$ et le point P multiple d'ordre $(\theta+1)\sigma+\sigma'$ pour les courbes C_1'.

L'application de cette remarque montre qu'on a

$$\rho_{2i} = \nu_{20} + \theta_{21}\nu_{21} + \theta_{22}\nu_{22} + \cdots + \theta_{2k_2}\nu_{2k_2},$$
$$\rho_{3i} = \nu_{30} + \theta_{31}\nu_{31} + \theta_{32}\nu_{32} + \cdots + \theta_{3k_3}\nu_{3k_3},$$

les θ étant des entiers positifs qui dépendent évidemment de la valeur de i.

Liége, le 25 mars 1943.

M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)
N° Réf. 2019