Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 3 juillet 1943, n^{os} 7-9.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur certaines involutions appartenant à une surface algébrique et n'ayant que des points unis parfaits,

par Lucien GODEAUX.
Membre de l'Académie.

Étant donnée une involution cyclique d'ordre premier p appartenant à une surface algébrique et n'ayant qu'un nombre fini de points unis, nous disons qu'un de ceux-ci est un point uni parfait si tous les points de la surface qui lui sont infiniment voisins sont eux-mêmes unis pour l'involution [1]. Il est aisé de former un exemple d'involution cyclique n'ayant que des points unis parfaits, il suffit de considérer une surface transformée en elle-même par une homographie biaxiale de période p, ne passant pas par les axes de l'homographie. C'est à l'étude de cet exemple qu'est consacrée cette note. L'homographie étant d'ordre p, la surface F construite a l'ordre np, multiple de p. Il est aisé de calculer les genres de la surface Φ image de l'involution, il suffit d'appliquer les formules générales que nous avons obtenues. La surface Φ se construit de la manière suivante : Dans un espace linéaire S_{2p+1}, on considère deux espaces linéaires S_p, S'_p indépendants ; on prend alors dans S_p une courbe rationnelle normale K d'ordre p et dans S'_p, une courbe analogue K'. La surface Φ est l'inter-

[1] Voir notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scient. et ind., Paris, Hermann, 1935).

section d'une hypersurface d'ordre n et de la variété des droites joignant les points de K, K'. Nous montrons que le système canonique de la surface Φ est découpé sur celle-ci par les hypersurfaces d'ordre n passant simplement par S_p, S'_p et contenant deux cônes projetant K de deux points de K' et deux cônes projetant K' de deux points de K.

Dans le cas particulier $n = 1$, la surface Φ est rationnelle, c'est-à-dire que l'involution d'ordre p, engendrée sur une surface d'ordre p invariante pour une homographie biaxiale de période p, par cette homographie, possède $2\,p$ points unis parfaits et est rationnelle. On a ainsi un nouvel exemple d'une involution rationnelle n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant, dans le cas $p > 3$, à une surface possédant un système canonique effectif [1].

1. Considérons une homographie biaxiale de période p, où p est un nombre premier, d'équations

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : x_2 : \epsilon x_3 : \epsilon x_4, \tag{1}$$

ϵ étant une racine primitive d'ordre p de l'unité. Soient r_1 $(x_3 = x_4 = 0)$, r_2 $(x_1 = x_2 = 0)$ les axes de cette homographie.

Représentons par $\phi\,(h, k)$ un polynome entier et rationnel d'une part homogène et de degré h par rapport à x_1, x_2, d'autre part homogène et de degré k par rapport à x_3, x_4.

L'équation de la surface d'ordre np, ne passant pas par r_1, r_2, la plus générale, transformée en elle-même par l'homographie (1), s'écrit

---

[1] Nous avons déjà rencontré d'autres exemples de ce fait ; voir nos notes *Sur une involution rationnelle douée de trois points de coïncidence appartenant à une surface de genre trois* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1921, pp. 653-665, 694-702) ; *Sur une involution rationnelle n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface de genre quatre* (Idem, 1940, pp. 9-17).

$$\phi(np, 0) + \phi[(n-1)p, p] + \ldots$$
$$+ \phi[(n-i)p, ip] + \ldots + \phi(0, np) = 0. \quad (2)$$

Sur cette surface, l'homographie (1) engendre une involution I_p d'ordre p, présentant $2np$ points unis aux points de rencontre de la surface avec les droites r_1, r_2. Nous désignerons par A_{11}, A_{12},... les points de rencontre de la surface (2) avec r_1, par A_{21}, A_{22},... les points de rencontre de la surface avec r_2.

Le point A_{11} est simple pour la surface (2) et le plan tangent à cette surface en ce point est le plan $A_{11} r_2$. Dans ce plan, l'homographie (1) détermine une homologie de centre A_{11} et d'axe r_2. Par conséquent le point A_{11} est uni parfait pour l'involution I_p. Il en est de même des autres points unis de l'involution I_p.

Nous désignerons par F la surface d'équation (2) et par Φ une surface image de l'involution I_p. Nous pouvons prendre comme modèle projectif de la surface Φ une surface sur laquelle les points de diramation sont isolés. Ces points sont alors multiples d'ordre p, à cônes tangents rationnels, de la surface. Chacun d'eux est équivalent à une courbe rationnelle de degré $-p$. La surface Φ contient donc $2np$ courbes rationnelles de degré $-p$, ne se rencontrant pas deux-à-deux.

2. Nous avons établi [1] que les courbes canoniques de la surface Φ rencontrent chacune des courbes rationnelles de degré $-p$, de diramation, en $p-2$ points. Les courbes canoniques de la surface F qui leur correspondent passent donc $p-2$ fois par les points A_{11}, A_{12}, ... A_{21}, A_{22} ... Elles sont d'autre part, découpées par les surfaces d'ordre $np-4$; celles-ci doivent passer $p-2$ fois par les points unis, c'est-à-dire $p-2$ fois par les droites r_1, r_2. L'équation de ces surfaces est donc :

[1] *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique* (BULL. DE LA SOC. MATH. DE FRANCE, 1919, pp. 516).

$$\psi[(n-1)p-2, p-2] + \psi[(n-2)p, 2p-4] + \ldots$$
$$+ \psi[p-2, (n-1)p-2] = 0.$$

Le nombre de ces surfaces linéairement indépendantes est égal au genre géométrique de Φ. Pour calculer celui-ci, observons que la surface F étant dépourvue de points singuliers, est régulière. Ses genres sont

$$p_a = p_g = \binom{np-1}{3}. \quad p^{(1)} = np(np-4)^2 + 1.$$

Entre les genres arithmétique p_a et linéaire $p^{(1)}$ de F, et les genres arithmétiques π_a et linéaire $\pi^{(1)}$ de Φ, on a les relations (¹)

$$12(p_a+1) = 12p(\pi_a+1) + 2pn(p-1)(p-5),$$
$$(p^{(1)}-1) = p(\pi^{(1)}-1) + 2pn(p-2)^2$$

La surface Φ étant régulière, ses genres sont donc

$$\pi_a = \pi_g = \tfrac{1}{6}(n-1)[n(n+1)p^2 - 6np + 6],$$
$$\pi^{(1)} = n[(n^2-2)p^2 - 8(n-1)p + 8] + 1.$$

3. Soient C les sections planes de F, C_1 les sections par les plans passant par r_1 et C_2 les sections par les plans passant par r_2. Chacune des courbes C_1, C_2 est transformée en elle-même par l'homographie (1) et nous désignerons par Γ_1, Γ_2 les courbes qui leur correspondent sur la surface Φ. Soient en outre γ_{1i} la courbe rationnelle de degré $-p$ qui correspond au point uni A_{1i}, γ_{2i} celle qui correspond à A_{2i} ($i = 1, 2, \ldots, np$).

Les courbes Γ_1, Γ_2 engendrent des faisceaux $|\Gamma_1|$ $|\Gamma_2|$ de genre $\frac{1}{2}(n-1)(np-2)$, dépourvus de points-base. Les courbes Γ_1 rencontrent en un point chacune des courbes γ_{1i} et les courbes Γ_2 en un point chacune des courbes γ_{2i}. Une courbe Γ_1 et une courbe Γ_2 se rencontrent en n points.

A une courbe C, de genre $\frac{1}{2}(np-1)(np-2)$, corres-

(¹) *Recherches...* (*loc. cit.*).

pond sur Φ une courbe Γ^* de même genre, possédant $\frac{1}{2}\, p(p-1)n$ points doubles variables, correspondant aux couples de points de la courbe C appartenant à des groupes de l'involution I_p. La courbe Γ^* appartient totalement à un système linéaire $|\Gamma|$ de genre virtuel $\frac{1}{2}\,[n(n+1)\,p^2 - 4np + 2]$ et de degré virtuel np^2.

Faisons varier la courbe C d'une manière continue dans $|C|$ de manière à la faire tendre vers une courbe C_1 ; la courbe Γ^* varie dans $|\Gamma|$ et tend vers une courbe Γ_1 comptée p fois, augmentée des courbes γ_{1i}. On a donc

$$\Gamma \equiv p\Gamma_1 + \Sigma\gamma_{1i}.$$

On a de même

$$\Gamma \equiv p\Gamma_2 + \Sigma\gamma_{2i}.$$

4. Pour construire un modèle projectif de la surface Φ, considérons en premier lieu le cas $n = 1$. Appelons F_1 la surface F. L'équation de F_1 s'écrit

$$\phi\,(p, 0) + \phi\,(0, p) = 0.$$

Supposons dans cette équation les paramètres variables et rapportons projectivement les surfaces obtenues aux hyperplans d'un espace linéaire S_{2p+1} à $2p+1$ dimensions. A cet effet, posons

$$\rho X_i = x_1^i x_2^{p-i},\ \rho X'_i = x_3^i x_4^{p-i},\ (i = 0, 1, \ldots, p),$$

et interprétons les X_i, X'_i comme coordonnées projectives des points de S_{2p+1}.

L'élimination des x entre les équations précédentes conduit à

$$\left\| \begin{matrix} X_0 & X_1 & \ldots & X_{p-1} \\ X_1 & X_2 & \ldots & X_p \end{matrix} \right\| = 0, \tag{3}$$

$$\left\| \begin{matrix} X'_0 & X'_1 & \ldots & X'_{p-1} \\ X'_1 & X'_2 & \ldots & X'_p \end{matrix} \right\| = 0. \tag{4}$$

Dans l'espace S_p donné par $X'_i = 0$, les équations (3) représentent une courbe rationnelle normale K_1, d'ordre p et dans l'espace S'_p donné par $X_i = 0$, les équations (4) représentent une courbe rationnelle normale K_2 d'ordre p. Dans S_{2p+1}, les équations (3) et (4) représentent la variété V_3, d'ordre p^2, lieu des droites s'appuyant sur K_1 et K_2. Cette variété V_3 est l'image de l'involution d'ordre p engendrée dans l'espace par l'homographie (1) ; elle possède comme courbes multiples d'ordre p les courbes K_1, K_2.

La surface image de l'involution I_p appartenant à la surface F_1 est une section hyperplane Φ_1 de la variété V_3. Elle possède $2p$ points multiples d'ordre p_1 situés p sur la courbe K_1 et p sur la courbe K_2.

Les courbes Γ_1 sont les sections de Φ_1 par les cônes projetant la courbe K_1 des points de K_2 et les courbes Γ_2, les sections de Φ_1 par les cônes projetant K_2 des points de K_1. Les courbes Γ_1, Γ_2 sont actuellement rationnelles, d'ordre p, et forment deux faisceaux de courbes unisécantes. La surface Φ_1 est rationnelle ; on a d'ailleurs, d'après les formules établies plus haut,

$$\pi_a = \pi_g = 0.$$

On obtient ainsi un exemple d'une involution rationnelle, n'ayant qu'un nombre fini ($2p$) de points unis (parfaits), appartenant à une surface de genres

$$p_a = p_g = \tfrac{1}{6}(p-1)(p-2)(p-3).$$

5. Retournons au cas où n est quelconque. La surface Φ sera alors la section de la variété V_3 par une hypersurface V^n_{2p} d'ordre n de S_{2p+1}. Elle est d'ordre np^2 et ses sections hyperplanes sont évidemment les courbes Γ.

Nous allons supposer $n > 1$ et construire le système canonique $|L|$ de la surface Φ.

Considérons une courbe Γ_1 ; elle est l'intersection de Φ et du cône d'ordre p projetant la courbe K_1 d'un point de K_2. Représentons point par point ce cône sur un plan σ en faisant correspondre à ses sections hyperplanes les courbes d'ordre p de Σ ayant un point P multiple d'ordre p — 1 et p — 1 tangentes fixes en ce point. Désignons par P_1, P_2, ... P_{p-1} les points infiniment voisins de P situés sur ces tangentes.

A la courbe Γ_1 correspond dans σ une courbe G_n, d'ordre np, passant $n(p-1)$ fois par P et n fois par P_1, P_2, ... P_{p-1}. Les adjointes à cette courbe sont d'ordre $np - 3$, passent $n\,(p-1) - 1$ fois par P et $n - 1$ fois par P_1, P_2, ..., P_{p+1} ; elles se composent donc des $p - 1$ droites PP_1, PP_2, ..., PP_{p-1} et de courbes d'ordre $(n-1)\,p - 2$, passant $(n-1)\,p - n$ fois par P et $n - 2$ fois par chacun des points $P_1, P_2, \ldots, P_{p-1}$. Parmi ces courbes se trouvent les courbes formées de $n - 2$ courbes d'ordre p passant $p - 1$ fois par P, une fois par P_1, P_2, ..., P_{p-2}, et de $p - 2$ droites passant par P.

Observons que les n points communs à une courbe Γ_1 et à une courbe Γ_2 sont situés sur une droite s'appuyant sur K_1 et K_2, c'est-à-dire sur une génératrice du cône d'ordre p contenant Γ_1, génératrice à laquelle correspond, dans le plan σ, une droite passant par P. On en conclut que les courbes $(n-2)\,\Gamma + (p-2)\,\Gamma_2$ découpent la série canonique sur une courbe Γ_1. Le faisceau $|\Gamma_1|$ étant de degré 0 et ayant comme courbes fondamentales les np courbes γ_{2i}, l'adjoint $|\Gamma_1'|$ de $|\Gamma_1|$ est

$$|\Gamma_1'| = |(n-2)\,\Gamma + (p-2)\,\Gamma_2 + \lambda\Gamma_1 + \mu\Sigma\gamma_{2i}|,$$

λ et μ étant des entiers.

En utilisant les relations fonctionnelles liant Γ_1, Γ_2 à Γ, on peut écrire

$$|\Gamma_1'| = |n\Gamma + (\lambda - p)\,\Gamma_1 - 2\,\Gamma_2 - \Sigma\gamma_{1i} + (\mu - 1)\,\Sigma\gamma_{2i}|,$$

d'où pour le système canonique,

$$|L| = |n\Gamma + (\lambda - p - 1)\Gamma_1 - 2\Gamma_2 - \Sigma\gamma_{1i} + (\mu - 1)\Sigma\gamma_{2i}|.$$

Le système canonique doit évidemment être symétrique par rapport à $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ et aux courbes γ ; on doit donc avoir $\lambda = p - 1$, $\mu = 0$. Par suite,

$$|L| = |n\Gamma - 2\Gamma_1 - 2\Gamma_2 - \Sigma\gamma_{1i} - \Sigma\gamma_{2i}|.$$

Le système canonique sera donc découpé sur la surface Φ par les hypersurfaces d'ordre n passant simplement par les espaces S_p, S'_p et contenant deux fois un cône projetant K_1 d'un point de K_2 et deux fois un cône projetant K_2 d'un point de K_1.

Cette construction est évidemment illusoire dans le cas exclu $n = 1$.

Liége, le 10 juin 1943.