Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 7 novembre 1942, nos 10-11.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

# Sur les involutions du second ordre appartenant aux surfaces intersections complètes d'hyperquadriques,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

A diverses reprises, dans nos recherches sur les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique, nous avons été conduit à construire des surfaces images d'involutions du second ordre appartenant à des surfaces intersections complètes d'hyperquadriques. Dans cette note, nous reprenons cette question sous son aspect général. Dans un espace linéaire à $n$ dimensions, nous considérons une surface F intersection complète de $n - 2$ hyperquadriques, transformées en elles-mêmes par une homographie biaxiale harmonique. La surface F contient alors une involution du second ordre ; nous choisissons les hyperquadriques de telle sorte que cette involution ne possède qu'un nombre fini, ou nul, de points unis. Il existe sur la surface F deux systèmes linéaires appartenant à l'involution et découpés par les hyperquadriques ; nous considérons les surfaces images de l'involution obtenues en partant de ces systèmes. L'une de ces images appartient à l'intersection de deux cônes projetant des variétés de Veronese, l'autre appartient à une variété de Segre.

La première construction nous conduit à des surfaces que l'on peut définir de la manière suivante : On considère deux espaces linéaires $\eta$, $\zeta$ contenant le premier une variété de Veronese représentant les hyperquadriques d'un espace à $r$ dimensions et le second, une variété de Veronese représentant les hyperquadriques d'un espace à $s$ dimensions. Les espaces $\eta$, $\zeta$ ont respectivement

$\frac{1}{2}r(r+3)$ et $\frac{1}{2}s(s+3)$ dimensions et sont plongés dans l'espace de dimension minimum dans lequel ils sont indépendants. On projette de chacun des espaces la variété de Veronese de l'autre ; on obtient ainsi deux cônes se rencontrant suivant une certaine variété V. Il existe des hyperquadriques inscrites dans la variété V. La surface cherchée est une section, par un espace linéaire, de la variété commune à V et éventuellement à quelques-unes de ces hyperquadriques.

Nous considérons plus particulièrement les cas correspondants aux premières valeurs de $n$. Le cas $n = 7$ nous conduit à des variétés à trois dimensions dont les surfaces canoniques et pluricanoniques sont d'ordre zéro.

Nous utilisons à plusieurs reprises les résultats que nous avons obtenu sur les involutions appartenant à une surface algébrique [1].

**1.** Considérons un espace linéaire $S_{r+s+1}$ à $r+s+1$ dimensions et désignons par $y_0, y_1, \ldots, y_r, z_0, z_1, \ldots, z_s$ les coordonnées homogènes d'un de ses points. Soit alors H une homographie biaxiale harmonique d'équations

$$\frac{y'_0}{y_0} = \frac{y'_1}{y_1} = \ldots = \frac{y'_r}{y_r} = \frac{z'_0}{-z_0} = \frac{z'_1}{-z_1} = \ldots = \frac{z'_s}{-z_s}.$$

Les axes de cette homographie sont l'espace $S_s$, à $s$ dimensions d'équations

$$y_0 = y_1 = \ldots = y_r = 0$$

et l'espace $S_r$, à $r$ dimensions, d'équations

$$z_0 = z_1 = \ldots = z_s = 0.$$

Les hyperquadriques de $S_{r+s+1}$ transformées en elles-

(1) On trouvera un exposé de ces résultats dans notre travail sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualité scient. et indust., Paris, Hermann, 1935).

mêmes par H forment deux systèmes linéaires : L'un contient les hyperquadriques d'équation

$$\phi(y_0, y_1, \ldots, y_r) + \psi(z_0, z_1, \ldots, z_s) = 0, \qquad (1)$$

où $\phi$, $\psi$ sont des formes quadratiques. Il est dépourvu de points-base et a la dimension

$$R = \frac{1}{2}r(r+3) + \frac{1}{2}s(s+3) + 1.$$

L'autre contient les hyperquadriques d'équation

$$\Sigma\lambda_{ik}y_iz_k = 0, \quad (i = 0, 1, \ldots, r\,;\, k = 0, 1, \ldots, s) \quad (2)$$

et a pour base les axes $S_r$, $S_s$ de H. Sa dimension est égale à

$$\rho = rs + r + s.$$

L'homographie H engendre dans $S_{r+s+1}$ une involution $I_2$ d'ordre deux dont nous allons rechercher les représentations.

**2.** On obtient une première variété représentative de l'involution $I_2$ en rapportant projectivement les hyperquadriques du système (1) aux hyperplans d'un espace linéaire $S_R$ à R dimensions. Posons à cet effet

$$\rho Y_{ik} = y_iy_k, \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, r),$$
$$\rho Z_{jh} = z_jz_h, \qquad (j, h = 0, 1, \ldots, s).$$

Interprétons $Y_{ik}$, $Z_{jh}$ comme coordonnées des points de $S_R$ et désignons par $\eta$ l'espace linéaire à $\frac{1}{2}r(r+3)$ dimensions donné par $Z_{jh} = 0$, par $\zeta$ l'espace linéaire à $\frac{1}{2}s(s+3)$ dimensions représenté par $Y_{ik} = 0$.

En éliminant les $y$ et les $z$ entre les équations précédentes, on trouve les équations obtenues en écrivant que les déterminants

$$|Y_{ik}|, \qquad |Z_{jh}|$$

sont de caractéristique un.

Dans l'espace $\eta$, le premier groupe d'équations représente la variété de Veronese généralisée $V_r$, d'ordre $2^r$, représentant les hyperquadriques d'un espace linéaire à $r$ dimensions. Dans $S_R$, ces équations représentant le cône $V_y$, d'ordre $2^r$, à $\frac{1}{2}s(s+3)+r+1$ dimensions, projetant $V_r$ de l'espace $\zeta$.

De même, dans l'espace $\zeta$, le second groupe d'équations représente la variété de Veronese généralisée, $V_s$, d'ordre $2^s$ et, dans $S_r$, le cône $V_z$, d'ordre $2^s$, projetant $V_s$ de l'espace $\eta$. Ce cône a la dimension $\frac{1}{2}r(r+3)+s+1$.

L'intersection des cônes $V_y$, $V_z$ est la variété image de l'involution $I_2$. C'est une variété $V_{r+s+1}$, à $r+s+1$ dimensions, d'ordre $2^{s+r}$, ayant la variété $V_r$ multiple d'ordre $2^s$ et la variété $V_s$, multiple d'ordre $2^r$.

Aux hyperquadriques du système (1) correspondent les sections hyperplanes de $V_{r+s+1}$ ; pour trouver l'équation des variétés de $V_{r+s+1}$ qui correspondent aux hyperquadriques du système (2), élevons le premier membre de l'équation (2) au carré. Cette équation s'écrit alors

$$\Sigma\lambda_{ik}\lambda_{jh}Y_{ij}Z_{kh}=0. \tag{3}$$
$$(i,j=0,1,\ldots,r\,;\,h,k=0,1,\ldots,s).$$

Cette équation représente une hyperquadrique passant par les espaces $\eta$, $\zeta$ et touchant la variété $V_{r+s+1}$ en chaque point d'intersection.

On en conclut qu'aux hyperquadriques du système (2) correspondent sur $V_{r+s+1}$ des variétés $V_{r+s}$, d'ordre $2^{r+s}$, passant $2^{s-1}$ fois par $V_r$ et $2^{r-1}$ fois par $V_s$.

**3.** Rapportons projectivement les hyperquadriques (2) aux hyperplans d'un espace linéaire $S_\rho$ à $\rho$ dimensions, en posant

$$\rho' X_{ik}=y_i z_k,\quad (i=0,1,\ldots,r\,;\,k=0,1,\ldots,s)$$

et en interprétant les $X_{ik}$ comme coordonnées des points du $S_\rho$.

En éliminant les $y$, $z$ entre les équations précédentes, on obtient les équations exprimant que la matrice

$$\| X_{ik} \| , \quad (i = 0, 1, \ldots, r \,; k = 0, 1, \ldots, s)$$

est de caractéristique un. Ces équations représentent une variété de Segre $W_{r+s}$, à $r+s$ dimensions, d'ordre $\dfrac{(r+s)\,!}{r\,!\,s\,!}$.

A un couple de l'involution $I_2$ correspond un point de $W_{r+s}$, mais à un point de cette variété correspondent les $\infty^1$ couples de $I_2$ situés sur une droite s'appuyant sur les axes $S_r$, $S_s$ de l'homographie H. La variété $W_{r+s}$ représente les couples de points des espaces $S_r$, $S_s$, ou mieux les droites joignant les points de ces couples.

D'ailleurs, les hyperquadriques du système (2) passant par un point, contiennent la droite passant par ce point et s'appuyant sur les axes $S_r$, $S_s$ de H.

**4.** Considérons, dans l'espace $S_{r+s+1}$, une surface F intersection complète de $r+s-1$ hyperquadriques, transformée en elle-même par H et sur laquelle celle-ci engendre une involution $I_2$ ne possédant qu'un nombre fini de points unis.

La surface F peut être définie comme intersection de $r+s-1$ hyperquadriques transformées en elles-mêmes par H et précisément comme intersection de $n$ hyperquadriques du système (1) et de $r+s-n-1$ hyperquadriques du système (2). La surface F est donc d'ordre $2^{r+s-1}$.

Pour que l'involution engendrée par H sur F ne possède qu'un nombre fini de points unis, il faut que l'intersection des hyperquadriques du système (1) coupe celui des espaces $S_r$, $S_s$ ayant la plus grande dimension, en un nombre fini de points.

Si nous supposons $r \geqslant s$, on devra donc avoir $n \geqslant r$. D'une manière précise, si $n > r$, le surface F ne rencontre en général aucun des espaces unis de H et l'involution $I_2$ engendrée sur F par cette homographie est dépourvue de points unis.

Si $n = r = s$, la surface F rencontre chacun des axes $S_r$, $S_s$ de H en $2^n$ points. L'involution $I_2$ engendrée par H sur F possède $2^{n+1}$ points unis.

Si $n = r$ et $r > s$, la surface F rencontre $S_r$ en $2^r$ points, mais ne rencontre pas $S_s$ en général. L'involution $I_2$ donnée sur F possède $2^r$ points unis.

Aux groupes de l'involution $I_2$ de F correspondent dans $S_R$ les points d'une surface $\Phi$ tracée sur la variété $V_{r+s+1}$. Aux $n$ hyperquadriques du système (1) contenant F correspondent $n$ hyperplans de $S_r$ contenant $\Phi$ ; celle-ci appartient donc à un espace linéaire à $R - n$ dimensions que nous désignerons par $\sigma$.

Aux $r + s - n - 1$ hyperquadriques du système (2) contenant F correspondent dans $S_R$ des hyperquadriques passant par les espaces $\eta$, $\zeta$ et touchant la variété $V_{r+s+1}$ en chaque point d'intersection.

La section de la variété $V_{r+s+1}$ par l'espace $\sigma$ est une variété d'ordre $2^{r+s}$, de dimension $r + s - n + 1$. Une des hyperquadriques dont il vient d'être question touche cette variété suivant une variété du même ordre, de dimension $r + s - n$. A son tour, cette variété est touchée par une seconde hyperquadrique suivant une variété du même ordre et de dimension $r + s - n - 1$. Et ainsi de suite. On trouve finalement que la surface $\Phi$ a l'ordre $2^{r+s}$.

La variété $V_s$ de l'espace $\zeta$ est multiple d'ordre $2^{r-1}$ pour $V_{r+s+1}$. S'il existe un point de $\Phi$ appartenant à $V_s$, ce point est multiple d'ordre $2^{n-s+1}$ pour $\Phi$. De même, un point de $\Phi$ appartenant à $V_r$, de $\eta$, est multiple d'ordre $2^{n-r+1}$ pour $\Phi$.

Supposons $n > r \geqslant s$. L'espace $\sigma$ ne rencontre en général aucune des variétés $V_r$, $V_s$ et la surface $\Phi$ est dépourvue de points doubles.

Si $n = r > s$, l'espace $\sigma$ ne rencontre pas en général $V_s$, mais rencontre la variété $V_r$ en $2^r$ points, qui sont doubles pour la surface $\Phi$. D'après la théorie des involutions, ce sont d'ailleurs des points doubles coniques.

Si $n = r = s$, l'espace $\sigma$ rencontre chacune des variétés $V_r$, $V_s$ en $2^r$ points qui sont doubles coniques pour la surface $\Phi$.

Aux sections de la surface F par les hyperquadriques du système (1) ne contenant pas F correspondent les sections hyperplanes de $\Phi$. Aux sections de F par les hyperquadriques du système (2) ne passant pas par cette surface correspondent des courbes d'ordre $2^{r+s}$ le long de chacune desquelles une hyperquadrique touche $\Phi$. Ces courbes passent par les points doubles éventuels de la surface $\Phi$ situés sur les variétés $V_r$, $V_s$.

**5.** Occupons-nous maintenant de la surface $\Psi$, image de l'involution $I_2$ de la surface F, appartenant à la variété de Segre $W_{r+s}$ de $S_\rho$.

Une droite s'appuyant sur les axes $S_r$, $S_s$ de H et sur F ne rencontre en général cette surface qu'en deux points formant un couple de l'involution $I_2$. Ce couple est représenté sur $W_{r+s}$ par le point image de la droite considérée.

Représentons par

$$\phi_i(y_0, y_1, \ldots, y_r) + \psi_i(z_0, z_1, \ldots, z_s) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les $n$ hyperquadriques du système (1) passent par F.

En utilisant les relations

$$\frac{y_0}{X_{00}} = \frac{y_1}{X_{10}} = \ldots = \frac{y_r}{X_{r0}} = \lambda,$$

$$\frac{z_0}{X_{00}} = \frac{z_1}{X_{01}} = \ldots = \frac{z_s}{X_{0s}} = \mu,$$

on en déduit

$$\lambda^2\phi_i(X_{00}, X_{10}, \ldots, X_{r0}) + \mu^2\psi_i(X_{00}, X_{01}, \ldots, X_{0s}) = 0.$$

La surface $\Psi$ appartient donc à la variété

$$\left\| \begin{matrix} \phi_1(X_{00}, X_{10}, \ldots, X_{r0}) & \phi_2 \ldots \phi_n \\ \psi_1(X_{00}, X_{01}, \ldots, X_{0s}) & \psi_2 \ldots y_n \end{matrix} \right\| = 0,$$

c'est-à-dire à une variété $V_{\rho-n+1}$ à $\rho - n + 1$ dimensions, d'ordre $n.2^{n-1}$.

La surface $\Psi$ appartient d'autre part aux $r + s - n - 1$ hyperplans de $S_\rho$ qui correspondent aux hyperquadriques du système (2) contenant F ; elle appartient donc à un espace linéaire $S_{rs+n+1}$ à $rs + n + 1$ dimensions.

Observons que la variété $V_{\rho-n+1}$ a comme espaces multiples d'ordre $2^{n-1}$ les espaces

$$X_{00} = X_{10} = \ldots = X_{r0} = 0,$$
$$X_{00} = X_{01} = \ldots = X_{0s} = 0.$$

C'est un cône dont le sommet est l'espace commun aux espaces précédents.

Le premier coupe $W_{r+s}$ suivant une variété de Segre représentant les couples de points de deux espaces à $r$ et $s - 1$ dimensions ; le second suivant une variété de Segre représentant les couples de points de deux espèces à $r - 1$ et $s$ dimensions. La surface $\Psi$ n'appartient pas à ces variétés.

Supposons $n > r \geqslant s$. L'involution $I_2$ sur F est dépourvue de points unis et la surface $\Psi$ est d'ordre $2^{r+s}$.

Supposons $n = r > s$. L'involution $I_2$ possède $2^r$ points unis et la surface $\Psi$ est d'ordre $2^{r-1}(2^{s+1} - 1)$. Aux points unis correspondent $2^r$ droites de $\Psi$ ne se rencontrant pas deux-à-deux.

Supposons enfin $n = r = s$. L'involution $I_2$ sur F possède $2^{r+1}$ points unis et la surface $\Psi$ est d'ordre $2^{r+1}(2^{s-1} - 1)$. Aux points unis correspondent $2^{r+1}$ droites ne se rencontrant pas deux-à-deux.

**6.** Nous allons actuellement considérer les cas particuliers obtenus pour les premières valeurs de $r + s + 1$.

Supposons tout d'abord $r = 1$, $s = 1$. La surface F est une quadrique de $S_3$. La surface $\Phi$ est une surface du quatrième ordre de $S_4$, intersection de deux cônes projetant deux coniques de deux droites situées l'une dans le plan de la conique projetée de l'autre droite. Chacune des droites contient deux points doubles (coniques) de la surface.

La surface $\Psi$ est une quadrique qui se confond avec la variété de Segre $W_2$ de $S_\rho (\rho = 3)$.

Supposons $r + s + 1 = 4$. Le seul cas possible est $r = 2$, $s = 1$, $n = 2$. La surface F est d'ordre quatre, à sections hyperplanes elliptiques. La surface $\Phi$ est d'ordre huit et appartient à un espace $S_5$. Ses sections hyperplanes sont de genre trois et elle possède quatre points doubles coniques.

La surface $\Psi$ appartient également à un espace $S_5$; elle est du sixième ordre et est l'intersection de la variété de Segre $W_3^3$ représentant les couples de points d'un plan et d'une droite, avec une hypersurface du quatrième ordre passant doublement par un plan et par une quadrique de $W_3^3$. Ses sections hyperplanes sont de genre deux.

**7.** Supposons que la surface F appartienne à un espace linéaire à cinq dimensions. On a $r + s + 1 = 5$ et trois cas peuvent se présenter :

1° $r = 3$, $s = 1$, $n = 3$ ;
2° $r = 2$, $s = 2$, $n = 3$ ;
3° $r = 2$, $s = 2$, $n = 2$.

La surface F est actuellement de genres un $(p_a = P_4 = 1)$.

Dans le premier cas, l'involution $I_2$ appartenant à F possède huit points unis et les surfaces $\Phi$, $\Psi$ sont également de genres un.

La surface $\Phi$ est l'intersection par un espace $S_9$ de la variété d'ordre seize appartenant à un espace $S_{12}$ intersection d'un cône projetant d'un plan $\zeta$ la variété de Veronese $V_3^8$ appartenant à l'espace à neuf dimensions $\eta$ et d'un cône projetant de $\eta$ une conique située dans le plan $\zeta$. Elle possède huit points doubles sur la variété $V_3^8$.

La surface $\Psi$, d'ordre douze, contenant huit droites, appartient à la variété de Segre $W_4^4$ de $S_7$, représentant les points d'une droite et d'un espace à trois dimensions.

Nous avons déjà eu l'occasion d'étudier les deux autres cas. Dans le second cas (¹), l'involution $I_2$ appartenant à F est dépourvue de points unis et les surfaces $\Phi$, $\Psi$ sont donc de genres zéro et de bigenre un ($p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$).

La surface $\Phi$, d'ordre seize, est la section par un espace $S_8$ de la variété d'ordre seize, appartenant à un espace $S_{11}$, commune à deux cônes projetant, de deux espaces $\eta$, $\zeta$ à cinq dimensions, deux surfaces de Veronese $V_2^4$ situées dans ces espaces. La surface $\Psi$ appartient à la variété de Segre $W_4^6$ de $S_8$ représentant les couples de points de deux plans.

Dans le troisième cas (²), l'involution $I_2$ de F possède huit points unis et les surfaces $\Phi$, $\Psi$ sont de genres un ($p_a = P_4 = 1$). La surface $\Phi$, d'ordre seize, est la section par un espace $S_9$ de la variété commune aux cônes projetant de $\eta$, $\zeta$ de surfaces de Veronese appartenant respectivement à $\zeta$, $\eta$, et à une hyperquadrique touchant en chaque point d'intersection, la variété commune aux deux cônes. Elle possède huit points doubles, quatre sur chacune des surfaces de Veronese des espaces $\eta$, $\zeta$. La surface $\Psi$ est d'ordre douze et appartient à une sec-

(¹) *Sur les surfaces de bigenre un appartenant à un espace à huit dimensions* (Bull. de la Soc. roy. des Sciences de Liége, 1941, pp. 454-459).

(²) *Sur les surfaces normales de genres un appartenant à un espace linéaire à neuf dimensions* (Bull. de la Soc. roy. des Sciences de Liége, 1941, pp. 525-531).

tion hyperplane de la variété de Segre représentant les points de deux plans.

**8.** Considérons maintenant l'hypothèse où la surface F appartient à un espace linéaire à six dimensions ($r+s+1=6$). On sait que F est alors projectivement canonique, c'est-à-dire que son système canonique est constitué par ses sections hyperplanes.

Trois cas peuvent se présenter :

1° $r=4,\ s=1,\ n=4$ ;

2° $r=3,\ s=2,\ n=4$ ;

3° $r=3,\ s=2,\ n=3$.

Dans le premier cas, l'involution $I_2$ appartenant à la surface F possède seize points unis. La surface $\Phi$ est d'ordre 32 et appartient à un espace $S_{13}$. Elle est la section par cet espace de la variété, appartenant à un espace $S_{17}$, commune au cône projetant d'un plan $\zeta$ une variété de Veronese $V_4^{16}$ d'un espace $\eta$ à 14 dimensions, et au cône projetant de $\eta$ une conique $V_1^2$ appartenant au plan $\zeta$. Elle possède seize points doubles coniques situés sur $V_4^{16}$. Les sections hyperplanes de $\Phi$ sont ses courbes bicanoniques ; elles sont de genre 22.

La surface $\Psi$ est d'ordre 24 et appartient à la variété de Segre de $S_9$ représentant les couples de points d'une droite et d'un espace à quatre dimensions.

Les surfaces $\Phi$ et $\Psi$ sont de genres $p^{(1)}=9$, $p_a=p_g=5$, $P_2=14$.

Dans le second cas, l'involution $I_2$ appartenant à la surface F est dépourvue de points unis. Les surfaces $\Phi$ et $\Psi$ sont donc de genres $p^{(1)}=9$, $p_a=p_g=3$, $P_2=12$, ...

La surface $\Phi$ appartient à un espace linéaire $S_{11}$ ; c'est la section par cet espace de la variété appartenant à un espace $S_{15}$, commune au cône projetant de l'espace $\eta$, à 9 dimensions, la surface de Veronese $V_2^4$ appartenant à l'espace $\zeta$ à cinq dimensions, et au cône projetant de $\zeta$ la variété de Veronese $V_3^8$ appartenant à $\eta$. $\Phi$ est donc d'ordre 32.

La surface $\Psi$, d'ordre 32, est tracée sur la variété de Segre $W_5^{10}$, de $S_{11}$, représentant les couples de points d'un plan et d'un espace à trois dimensions.

Les hyperquadriques de $S_6$ découpent sur la surface F le système bicanonique de celle-ci ; l'une des surfaces $\Phi$, $\Psi$ a donc comme sections hyperplanes ses courbes bicanoniques. Désignons par C les sections hyperplanes de F, par $C_1$ celles qui sont découpées par les hyperplans passant par l'axe $S_3$ de H, par $C_2$ celles qui sont découpées par les hyperplans passant par l'axe $S_2$ de H. Dans le système canonique $|C|$ de F, il existe deux systèmes linéaires partiels $|C_1|$, $|C_2|$ composés au moyen de l'involution $I_2$. Nous avons établi [1] que celui de ces systèmes qui est le transformé du système canonique de $\Phi$ est celui qui a la dimension minimum, c'est-à-dire actuellement $|C_1|$. Dans le système bicanonique $|2C|$ de F, il y a de même deux systèmes appartenant à l'involution $I_2$ ; ce sont les systèmes contenant l'un les courbes $2C_1$, $2C_2$, l'autre les courbes $C_1 + C_2$. Le premier, qui est découpé sur F par les hyperquadriques du système (1), est évidemment le transformé du système bicanonique de $\Phi$. On en conclut que les sections hyperplanes de $\Phi$ sont les courbes bicanoniques de cette surface.

On sait de plus que les surfaces $\Phi$, $\Psi$, qui sont birationnellement identiques, ont le diviseur de Severi $\sigma = 2$.

Dans le troisième cas, l'involution $I_2$ de F possède huit points unis, situés sur l'axe $S_3$ de H. Les surfaces $\Phi$, $\Psi$ ont les genres $p^{(1)} = 9$, $p_a = p_g = 4$, $P_2 = 13$, ....

La surface $\Phi$, d'ordre 32, appartient à un espace $S_{12}$ ;

[1] *Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis, appartenant à une surface algébrique régulière.* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1932, pp. 672-679).

elle est la section par cet espace de la variété construite de la manière suivante : On considère dans $S_{15}$ un espace $\eta$ à 9 dimension et un espace $\zeta$ à 5 dimensions ; on projette de $\eta$ une surface de Veronese $V_2^4$ appartenant à $\zeta$ et de $\zeta$, une variété de Veronese $V_3^8$ appartenant à $\eta$. Une hyperquadrique touchant la variété commune à ces deux cônes en chaque point d'intersection détermine une variété $V_5^{32}$ dont la section par $S_{11}$ est la surface $\Phi$. Celle-ci possède huit points doubles coniques situés sur $V_3^8$ ; ses sections hyperplanes en sont les courbes bicanoniques.

La surface $\Psi$, d'ordre 28, appartient à une section hyperplane de la variété de Segre $W_5^{10}$, représentant les couples de points d'un plan et d'un espace linéaire à trois dimensions.

**9.** Nous supposerons en dernier lieu que la surface F appartient à un espace $S_7 (r + s + 1 = 7)$. Nous aurons à considérer les cas suivants :

1° $r = 5,\ s = 1,\ n = 5$ ;
2° $r = 4,\ s = 2,\ n = 5$ ou $4$ ;
3° $r = s = 3,\ n = 5,\ 4$ ou $3$.

Nous commencerons par déterminer le système canonique de la surface F. La variété $V_3^{16}$ de $S_7$, intersection complète de quatre hyperquadriques indépendantes, possède des surfaces canoniques et pluricanoniques d'ordre zéro, c'est-à-dire que tout système linéaire de surfaces de $V_3^{16}$ est son propre adjoint. Si $|G|$ est le système des sections hyperplanes de $V_3^{16}$, on a donc

$$|G'| = |G|.$$

Par suite, le système $|2G|$ est son propre adjoint et les courbes canoniques de la section de $V_3^{16}$ par une hyperquadrique sont découpées par les hyperquadriques. Par conséquent, le système canonique de la surface F est découpé sur celle-ci par les hyperquadriques. La surface F a donc les genres $p^{(1)} = 2^7 + 1$, $p_a = p_g = 31$.

Envisageons maintenant le premier cas. Nous sommes conduit à considérer, dans l'espace $S_{23}$, une conique $V_1^2$ appartenant à un plan $\zeta$ et une variété de Veronese $V_5^{32}$ dans un espace $\eta$ à 20 dimensions, ne rencontrant pas le plan $\zeta$. La variété d'ordre 64, intersection des cônes projetant $V_1^2$ de $\eta$ et $V_5^{32}$ de $\zeta$ est coupée, par un espace $S_{18}$, suivant la surface $\Phi$. Celle-ci, d'ordre 64, possède 32 points doubles coniques situés sur $V_5^{32}$ ; ces points correspondent aux 32 points unis de l'involution $I_2$ de F, situés sur l'axe $S_5$ de l'homographie H.

La surface $\Psi$, d'ordre 48, appartient à la variété de Segre $W_6^6$ représentant les couples de points d'une droite et d'un espace à cinq dimensions.

Les sections hyperplanes de la surface $\Phi$ en sont les courbes canoniques et cette surface est donc projectivement canonique ; ses genres sont $p^{(1)} = 65$, $p_a = p_g = 19$.

**10.** Passons à l'examen du second cas et supposons tout d'abord $n = 5$. L'involution $I_2$ appartenant à F est dépourvue de points unis. Il en résulte que les surfaces $\Phi$, $\Psi$ auront les genres $p^{(1)} = 65$, $p_a = p_g = 15$.

Envisageons, dans un espace $S_{20}$, un espace $\eta$ à 14 dimensions et un espace $\zeta$ à 5 dimensions, indépendants. Projetons de $\eta$ une surface de Veronese $V_2^4$ appartenant à $\zeta$ et de $\zeta$, une variété de Veronese $V_4^{16}$ appartenant à $\eta$. La section de la variété intersection de ces deux cônes par un espace $S_{15}$ est la surface $\Phi$, d'ordre 64.

La surface $\Psi$, d'ordre 64, appartient à la variété de Segre $W_6^{15}$ représentant, dans un $S_{14}$, les couples de points d'un plan et d'une espace à quatre dimensions.

Les sections hyperplanes de la surface $\Psi$ en sont les courbes canoniques. Les surfaces $\Phi$, $\Psi$ ont le diviseur de Severi $\sigma = 2$.

Supposons maintenant $n = 4$. L'involution $I_2$ appartenant à F possède 16 points unis, appartenant à l'axe $S_4$ de l'homographie H. Les surfaces $\Phi$ et $\Psi$ ont par conséquent les genres $p^{(1)} = 65$, $p_a = p_g = 17$.

Envisageons, dans un espace $S_{20}$, deux espaces $\eta$, $\zeta$, le premier à 14 dimensions, le second à 5 dimensions. Considérons ensuite la variété intersection du cône projetant de $\eta$ une surface de Veronese $V_2^4$ de $\zeta$ et du cône projetant de $\zeta$ une variété de Veronese $V_4^{16}$ de $\eta$. Il existe des hyperquadriques inscrites dans cette variété. La variété $V_6^{14}$, commune à la variété considérée et à une de ces hyperquadriques, est coupée par un espace $S_{16}$ suivant la surface $\Phi$. Celle-ci possède 16 points doubles coniques situés sur $V_4^{16}$ et est projectivement canonique.

La surface $\Psi$ appartient à une section hyperplane $S_{13}$ de la variété de Segre $W_6^{15}$ considérée tantôt. Elle est d'ordre 56 et les sections hyperplanes sont de genre 61.

**11.** Occupons-nous enfin du cas $r = s = 3$ et supposons tout d'abord $n = 5$. L'involution $I_2$ sur F est dépourvue de points unis et les surfaces $\Phi, \Psi$ ont les genres $p^{(1)} = 65$, $p_a = p_g = 15$.

Considérons, dans un espace $S_{19}$, deux espaces à neuf dimensions $\eta$, $\zeta$ indépendants et, dans chacun de ces espaces, une variété de Veronese $V_3^8$. Projetons de chacun de ces espaces la variété de Veronese située dans l'autre ; les deux cônes obtenus ont en commun une variété $V_7^{64}$ d'ordre 64, à sept dimensions.

La surface $\Phi$ est la section de la variété $V_7^{64}$ par un espace $S_{14}$ ; c'est une surface projectivement canonique, que nous avons déjà signalée [1].

La surface $\Psi$, d'ordre 64, appartient à la variété de Segre $W_6^{20}$ de $S_{15}$ représentant les couples de points de deux espaces à trois dimensions.

---

[1] *Sur la construction d'une surface canonique.* (Bull. de la Soc. roy. de Sciences de Liége, 1936, pp. 140-143).

Les surfaces $\Phi$, $\Psi$ ont le diviseur de Severi $\sigma = 2$.

Supposons en second lieu $n = 4$. L'involution $I_2$ de F est toujours dépourvue de points unis et les surfaces $\Phi$, $\Psi$ sont de genres $p^{(1)} = 65$, $p_a = p_g = 15$.

Il existe des hyperquadriques de $S_{19}$ inscrites dans la variété $V_7^{64}$ ; soit $V_6^{64}$ la variété de contact de $V_7^{64}$ avec une de ces hyperquadriques. La surface $\Phi$ est la section de la variété $V_6^{64}$ par un espace $S_{15}$.

La surface $\Psi$, d'ordre 64, appartient à une section hyperplane $S_{14}$ de la variété $W_6^{20}$ ; c'est une surface projectivement canonique.

Le diviseur de Severi des surfaces $\Phi$, $\Psi$ est $\sigma = 2$.

Il nous reste à examiner le cas $n = 3$. L'involution $I_2$ appartenant à F possède alors 16 points unis, 8 dans chacun des axes $S_3$ de l'homographie H.

Les surfaces $\Phi$, $\Psi$ ont les genres $p^{(1)} = 65$, $p_a = p_g = 17$.

Reprenons la variété $V_7^{64}$ et considérons deux hyperquadriques inscrites dans cette variété. Les points communs à ces trois variétés forment une variété $V_5^{64}$. La section de cette variété par un espace $S_{16}$ est la surface $\Phi$. C'est une surface projectivement canonique, possédant seize points doubles coniques situés huit sur chacune des variétés $V_3^8$.

La surface $\Psi$, d'ordre 64, appartient à la section de la variété de Segre $W_6^{20}$ par un espace $S_{13}$.

**12.** L'étude du cas $r + s + 1 = 7$ nous conduit à des variétés algébriques à trois dimensions dont les surfaces canoniques et pluricanoniques sont d'ordre zéro.

Considérons par exemple le dernier cas examiné : $r = s = 3$, $n = 3$. Nous avons considéré la variété $V_5^{64}$ commune à la variété $V_7^{64}$ et à deux hyperquadriques inscrites dans cette variété. Coupons $V_5^{64}$ par un espace linéaire $S_{17}$ ; la section hyperplane de la variété $V_3^{64}$ ainsi obtenue est une surface $\Phi$, projectivement canonique. En d'autres termes, les courbes canoniques de $\Phi$

sont découpées sur cette surface par les hyperplans de $S_{17}$. Par conséquent, sur la variété $V_3^{64}$, le système adjoint du système $|\Phi|$ des sections hyperplanes est le système $|\Phi|$ lui-même et les surfaces canonique et pluricanoniques de $V_3^{64}$ sont bien d'ordre zéro.