Bulletin de la Classe des sciences

Variétés algébriques généralisant la surface d'Enriques

Lucien Godeaux

Résumé
Construction de variétés algébriques à n dimensions possédant des variétés pluricanoniques d'ordre zéro, privées de variétés pluricanoniques de rang impair et ayant des variétés pluricanoniques de rang pair d'ordre zéro suivant que *n* est impair ou pair.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Variétés algébriques généralisant la surface d'Enriques

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Construction de variétés algébriques à n dimensions possédant des variétés pluricanoniques d'ordre zéro, privées de variétés pluricanoniques de rang impair et ayant des variétés pluricanoniques de rang pair d'ordre zéro suivant que n est impair ou pair.

On sait que si une surface algébrique F possède des courbes pluricanoniques d'ordre zéro ($p_a = P_4 = 1$) et contient une involution du second ordre privée de points unis, l'image de cette involution est une surface d'Enriques Φ privée de courbes pluricanoniques de rang impair et ayant des courbes pluricanoniques de rang pair d'ordre zéro ($p_a = p_g = 0, P_6 = 1$).

On peut construire la surface Φ en partant d'une surface F intersection de trois hyperquadriques de S_5 transformées en elles-mêmes par une homographie harmonique ayant comme axes ponctuels deux plans. La surface Φ est alors la section par un espace à huit dimensions de la variété W représentant l'involution donnée par H dans S_5 [1].

Sous cette forme, la construction de la surface Φ peut s'étendre à celle de variétés algébriques. Nous établissons le théorème suivant:

Si V *est une variété algébrique à n dimensions appartenant à un espace* S_{2n+1} *à* $2n + 1$ *dimensions et si* H *est une homographie harmonique ayant pour axes ponctuels deux espaces à n dimensions, si en outre les variétés pluricanoniques de* V *sont d'ordre zéro, une variété* Ω *image de*

[1] Cf. P. BURNIAT, *Recherches sur les surfaces de bigenre un* (Mémoires de la Société des Sciences de Liège, 1936, pp. 1-100).

l'involution engendrée par H *sur* F, *supposée sans point uni, possède des variétés pluricanoniques d'ordre zéro si n est impair, ou des variétés pluricanoniques de rang pair d'ordre zéro et est privée de variétés pluricanoniques de rang impair si n est pair* ([1]).

Nous utiliserons la variété W qui représente dans un espace à $(n+1)(n+2)-1$ dimensions l'involution engendrée par H dans l'espace S_{2n+1}. Nous avons plusieurs fois utilisé cette variété et n'en reprendrons pas l'étude, d'ailleurs fort simple ([2]).

1. Soit dans un espace S_5 à cinq dimensions une homographie harmonique H ayant comme axes ponctuels deux plans σ_1, σ_2.

Dans le système ∞^{20} des hyperquadriques de S_5, il y a deux systèmes d'hyperquadriques transformées en elles-mêmes par H. L'un, $|Q_1|$, est formé d'hyperquadriques ne rencontrant pas les plans σ_1, σ_2, il a la dimension onze. L'autre, $|Q_2|$, est formé d'hyperquadriques passant par les plans σ_1, σ_2, il a la dimension huit.

En rapportant projectivement les hyperquadriques Q_1 aux hyperplans d'un espace S_{11} à onze dimensions, il correspond aux couples de points de l'involution engendrée par H dans S_5, les points d'une variété W d'ordre 16, lieu des droites joignant les points de deux surfaces de Veronese situées dans des espaces ne se rencontrant pas.

Soit dans S_5, une surface F intersection de trois hyperquadriques Q_1. On sait qu'elle possèdc des courbes pluricanoniques d'ordre zéro ($p_a = P_4 = 1$). Il lui correspond dans S_{11} la section Φ de W par un espace à huit dimensions, S_8, commun aux hyperplans homologues des hyperquadriques Q_1 passant par F.

Les sections de F par les hyperquadriques sont des courbes C de genre 17 et par conséquent les sections hyperplanes Γ de Φ sont de genre 9.

Le système $|C|$ est son propre adjoint. Il contient deux systèmes appartenant à l'involution I déterminàe par H sur F. L'un, découpé par

([1]) Dans notre note *Construction de variétés algébriques ayant une variété canonique d'ordre zéro ou privées de variété canoniques* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1972, pp. 1180-1188) nous avons utilisé le même principe que dans cette note mais avec des démonstrations différentes. Notons que le théorème du n° 5, p. 1188 n'est vrai que si *n* est pair, comme cela résulte d'ailleurs de la note présente.

([2]) Voir par exemple notre note *Construction de quelques surfaces projectivement canoniques* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1970, pp. 871-885).

les hyperquadriques Q_1, a la dimension huit. L'autre, découpé par les hyperquadriques Q_2 a également la dimension huit. Sur une courbe C du premier système, qui correspond à une section hyperplane Γ de Φ, il y a deux séries appartenant à l'involution I: l'une de dimension sept, est découpée par les Q_1, l'autre de dimension huit, est découpée par les Q_2. On sait que c'est cette dernière qui est la transformée de la série canononique de la courbe Γ. Si nous désignons par Γ' les courbes qui correspondent sur Φ aux sections de F par les Q_2, on voit que $| \Gamma' |$ est l'adjoint à $| \Gamma |$. Or, le long de chaque courbe Γ', il existe une hyperquadrique passant par les surfaces de Véronese, touchant Φ en chaque point d'intersection. Une courbe Γ' ne peut donc contenir une courbe Γ et la surface Φ est dépourvue de courbe canonique.

Le système biadjoint à $| \Gamma |$ coïncide évidemment avec $| \Gamma |$ et la surface Φ contient une courbe bicanonique d'ordre zéro. C'est une surface d'Enriques.

2. Considérons dans un espace S_{2n+1} à $2n + 1$ dimensions une homographie harmonique H ayant comme axes ponctuels deux espaces σ_1, σ_2 à n dimensions. Soit I l'involution déterminée par H dans S_{2n+1}.

Les hyperquadriques de S_{2n+1} transformées en elles-mêmes par H forment deux systèmes. L'un, $| Q_1 |$, de dimension $(n + 1)(n + 2) - 1$, est formé d'hyperquadriques ne rencontrant pas les axes de H. L'autre, $| Q_2 |$, est formé des hyperquadriques passant par les axes de H, il a la dimension $(n + 1)^2 - 1$.

Si nous rapportons projectivement les hyperquadriques Q_1 aux hyperplans d'un espace S_R à $R = (n + 1)(n + 2) - 1$ dimensions, il correspond aux groupes de l'involution I engendrée dans S_{2n+1} par H les points d'une variété W d'ordre 2^{2n} lieu des droites s'appuyant sur deux variétés de Veronese s'ordre 2^n, Ψ_1 et Ψ_2, situées dans des espaces ne se rencontrant pas.

Aux hyperquadriques Q_1 correspondent les sections hyperplanes de W et aux hyperquadriques Q_2 des variétés à $2n$ dimensions le long de chacune desquelles une hyperquadrique passant par Ψ_1 et Ψ_2 touche W.

Si nous désignons par Q_1' et Q_2' les variétés qui correspondent sur W respectivement aux hyperquadriques Q_1, Q_2, on a

$$2Q_1' \equiv 2Q_2'.$$

Ces propriétés ont été établies dans une note citée plus haut.

3. Considérons dans S_{2n+1} la variété V à n dimensions intersection de $n + 1$ hyperquadrique Q_1. Sur cette variété, H détermine une involution I du second ordre, privée de points unis.

Désignons par Ω la variété à n dimensions qui correspond sur W à la variété V. La variété Ω appartient à un espace à $n(n + 2)$ dimensions commun aux hyperplans homologues des Q_1 passant par V.

Les variétés canoniques de V sont découpées par les hypersurfaces d'ordre $2(n + 1) - (2n + 2) = 0$, c'est-à-dire que la variété V possède une variété canonique d'ordre zéro.

Soit F la variété section de V par une hyperquadrique Q_1 et Φ la section hyperplane de Ω qui lui correspond. Le système $| F |$ étant son propre adjoint le système canonique de F contient deux systèmes appartenant à l'involution I. L'un, découpé par les hyperquadriques Q_1 ne contenant pas F, a la dimension $n(n + 2) - 1$ et l'autre, découpé par les hyperquadriques Q_2, a la dimension $n(n + 2)$. Soient $| C_1 |$, $| C_2 |$ ces systèmes. Nous avons démontré que le transformé du système canonique de Φ était le système $| C_1 |$ si $n - 1$ est pair, le système $| C_2 |$ si $n - 1$ est impair [1].

4. Supposons en premier lieu n pair, donc $n - 1$ impair. Le transformé du système canonique de Φ sur F est celui des systèmes $| C_1 |$, $| C_2 |$ qui a la plus grande dimension, donc le système $| C_2 |$. Il en résulte que le système $| \Phi' |$ adjoint au système $| \Phi |$ est formé de variétés le long de chacune desquellex une hyperquadrique passant par les variétés Ψ_1, Ψ_2 touche W et par suite Ω. Une variété Φ' ne peut donc contenir une variété Φ et la variété Ω est privée de variété canonique.

Le biadjoint à $| \Phi |$ coïncide avec l'adjoint à $| \Phi' |$, donc avec $| \Phi |$. Il en résulte que la variété Ω possède une variété bicanonique d'ordre zéro.

Il est facile de voir que la variété Ω est privée de variété pluricanonique de rang impair mais possède des variétés pluricanoniques de rang pair d'ordre zéro.

On a de plus

$$| 2\Phi | = | 2\Phi' |.$$

---

[1] *Sur une propriété des correspondances rationnelles entre deux variétés algébriques* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1938, pp. 291-297).

5. Supposons maintenant n impair, donc $n - 1$ pair. Le transformé du système canonique de Φ est maintenant $| C_1 |$, de sorte que sur Ω, le système des sections hyperplanes est son propre adjoint et la variété Ω possède une variété canonique d'ordre zéro. Il est facile de voir qu'il en est de même des variétés pluricanoniques.

Il peut sembler curieux que la nature de la variété Ω de la parité de n. Dans notre note citée plus haut ([1]), nous avons établi qu'entre le genre arithmétique que p_a d'une variété à n dimensions et celui p_a' d'une variété représentant une involution d'ordre deux privée de points unis appartenant à V, on a la relation

$$p_a + (-1)^n = 2[p_a' + (-1)^n].$$

Si $p_a = 1$, on a $p_a' = 0$ ou 1 suivant que n est pair ou impair.

Liège, le 29 octobre 1974.

([1]) *Sur une propriété...* (loc. cit).