Sur les points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions (troisième note)

Lucien Godeaux

Résumé
Étude de la structure, dans le cas général, d'un point uni isolé d'une involution cyclique d'ordre premier appartenant à une variété algébrique à trois dimensions. Structure du point de diramation correspondant sur une variété image de l'involution.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions
(troisième note)

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Étude de la structure, dans le cas général, d'un point uni isolé d'une involution cyclique d'ordre premier appartenant à une variété algébrique à trois dimensions. Structure du point de diramation correspondant sur une variété image de l'involution.

Dans la première note [1], nous avons considéré les cas où dans l'espace σ à trois dimensions tangent en un point uni isole O d'une involution déterminée sur une variété algébrique V à trois dimensions par une homographie H de période première p possédant p axes ponctuels, l'homographie déterminée par H dans la gerbe de sommet O de l'espace σ est une homologie. Dans la seconde note, dont nous conserverons les notations, nous avons supposé que l'homographie déterminée par H dans cette gerbe était non homologique, mais en faisant toutefois une restriction: c'est que pour les involutions déterminées par H sur les sections hyperplanes de V ayant un point simple en O, ce point était uni de seconde espèce et de première catégorie.

Il convient de préciser notre point de vue. Sur une variété algébrique normale V à trois dimensions, transformée en soi par une homographie H de période première p, ayant p axes ponctuels dont

---

[1] Les deux premières notes ont été publiées dans le Bulletin de l'Académie, 1973, pp. 1090-1099, 1125-1133.

un seul rencontre V, nous considérons un point uni isolé O de l'involution déterminée par H sur V. Nous supposons que l'espace σ tangent à V en O, rencontre en un point trois des axes de H ne rencontrant pas V. Dans le système des sections hyperplanes $|F|$ de V, il existe quatre système $|F_0|$, $|F_1|$, $|F_\alpha|$, $|F_\beta|$ sur chacune des surfaces desquels l'homographie H engendre une involution. Les surfaces du premier système sont découpées par les hyperplans passant par les axes de H sauf par celui qui rencontre V. Les surfaces des trois autres systèmes sont découpées par les hyperplans ne contenant que deux des axes de H sur lesquelles l'espace σ s'appuie. Dans notre seconde note, nous avons supposé que sur les trois surfaces des trois derniers systèmes, le point O était un point uni de seconde espèce, mais de première catégorie. Dans cette nouvelle note, nous supposons que sur une surface F, le point O est de seconde catégorie. Alors que dans le cas étudié dans la seconde note, le cône tangent au point de diramation O' correspondant à O sur la variété Ω image de l'involution dont les sections hyperplanes correspondent aux surfaces F_0, ce cône se scinde en six cônes, dans le cas considéré ici, le cône tangent se scinde en neuf cônes. On en conclut que si le point O est de seconde espèce et de troisième catégorie sur les surfaces F_1, F_α, F_β, le cône tangent à Ω en O' se scinde en douze cônes.

1. Nous considérons sur une variété V à trois dimensions une involution cyclique d'ordre premier p', n'ayant qu'un nombre fini de points unis. On sait ([2]) que l'on peut prendre pour V une variété normale dans un espace S_r à r dimensions sur laquelle l'involution I est déterminée par une homographie H de période p possédant p axes ponctuels $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ dont un seul, ξ_0, rencontre V en un nombre fini de points, simples pour la variété V, qui sont les points unis de l'involution I. Soit O un point uni isolé de l'involution, c'est-à-dire qu'aucune tangente à V en O n'appartient à l'espace ξ_0.

Nous supposerons que l'espace σ tangent en O à V, rencontre en un point trois des axes de H distincts de ξ_0, c'est-à-dire pour fixer les idées, l'axe ξ_1 en un point A_1, l'axe ξ_α en un point A_α, l'axe ξ_β en un point A_β.

([2]) Voir notre ouvrage *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Edit. Cremonese, 1963).

Désignons par F les sections hyperplanes de V, par F_0 celles qui passent par les axes de H sauf par ξ_0, par F_1 celles qui passent par les axes de H sauf par ξ_1, par F_α celles qui passent par les axes de H sauf par ξ_α et enfin par F_β celles qui passent par les axes de H sauf par ξ_β.

Dans notre seconde note, nous avons montré que l'on peut trouver deux nombres entiers positifs tels que

$$\beta = u\alpha, \ \alpha = v\beta$$

satisfaisant à la condition $uv - 1$ multiple de p. Ce nombre étant premier, un des nombres u, v détermine l'autre.

2. Soient λ_1, μ_1 une solution en nombres entiers positifs des congruences

$$\lambda + v\mu \equiv 0, \ \mu + u\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p) \tag{1}$$

telle que la somme $\lambda_1 + \mu_1$ soit minimum. Nous supposerons que l'on a

$$\lambda_1 + v\mu_1 = hp, \ \mu_1 + u\lambda_1 = p,$$

h étant un entier supérieur à l'unité. En d'autres termes, nous supposons que pour l'involution déterminée par H sur une surface F_1, O est un point uni de seconde espèce et de deuxième catégorie.

2. Sur une surface F_1, le point O est l'origine de trois branches: deux linéaires et une superlinéaire.

Les deux branches linéaires sont:

Une branche passant par les points $(v,1), (v,2), \ldots, (v,x)$ multiples d'ordre λ_1, $(v, x+1)$ multiple d'ordre y, $(v, x+2), \ldots, (v, u-1)$ multiples d'ordre λ_1'.

Une branche passant par les points $(u,1), (u,2), \ldots, (u, v-1)$, multipls d'ordre μ_1.

La branche superlinéaire passe par les points $(v,1), (v,2), \ldots, (v,x)$ multiples d'ordre λ_1, par le point $(v, x+1)$ multiple d'ordre y, par une suite de points infiniment voisins successifs de $(v, x+1)$ se terminant par un point P multiple d'un certain ordre m.

Comme nous l'avons montré dans une note récente (3), si l'on pose

$$p = av + b, \qquad (b < v)$$

on a $\lambda_1' = a$. De plus, m est le plus grand commun diviseur de $\lambda_1 - a$ et $b - \mu_1$.

3. Rapportons projectivement les surfaces F_0 aux hyperplans d'un espace S' ayant la même dimension que le système $| F_0 |$. Il correspond à V unc variété Ω image de l'involution I. Désignons par Φ_i les surfaces de Ω qui correspondent aux surfaces F_i de V. Les surfaces Φ_0 sont les sections hyperplanes de Ω.

Nous désignerons par Ω' la projection de Ω à partir du point O' correspondant à O sur un hyperplan de l'espace ambiant et par Φ_i' les projections des surfaces Φ_i.

Les points qui appartiennent aux branches issues du point O sur une surface F_1 sont tous unis de seconde espèce pour l'involution I' déterminée par H sur la surface, sauf les points $(v, u - 1)$, $(u, v - 1)$ et P, qui sont unis de première espèce. Sur la surface Φ_1' homologue de F_1 sur la variété Ω', il correspond au domaine du point (v,ul) une courbe rationnelle γ_1' d'ordre a, au domaine du point $(u, v - 1)$, une courbe rationnelle γ^1 d'ordre μ_1 et enfin au domaine du point P, une courbe rationnelle τ_1 d'ordre m.

Appelons F_{00} les surfaces F_0 passant par le point O.

Lorsque la surface F_1 varie, les courbes γ_1', γ_1, τ_1 engendrent respectivement des surfaces Ψ_1', Ψ_1, M_1. Les courbes (F_1,F_{00}) passent par les branches d'origine O considérées plus haut avec les multiplicités indiquées. Il en résulte que les surfaces F_{00} passent a fois par le point $(v, u - 1)$, μ_1 fois par le point $(u, v - 1)$ et m fois par le point P. Or, aux surfaces F_{00} correspondent les sections hyperplanes de la variété Ω'. Il en résulte que les surfaces Ψ_1', Ψ_1, M_1 sont respectivement d'ordres a, μ_1, m.

Les cônes projetant du point O' ces trois surfaces appartiennent au cône tangent à la variété Ω en ce point. Si donc l'involution déterminée par H sur les surfaces F_1, F_α, F_β ont le point O comme point uni de deuxième espèce et de seconde catégorie, le cône tangent à Ω en O' se scinde en neuf cônes.

(3) *Recherches sur la structure des points de diramation d'une surface algébrique multiple* Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1974, pp. 91-96).

Plus généralement, si le point O est de seconde espèce et de deuxième catégorie pour l'involution déterminée par H sur une des surfaces F_1, F_α, F_β, le cône tangent au point O' à la variété Ω se scinde en neuf parties.

4. Supposons que λ_1, μ_1 étant toujours une solution des congruences (1) telle que $\lambda_1 + \mu_1$ soit minimum, on ait

$$\lambda_1 + v\mu_1 = hp, \quad \mu_1 + u\lambda_1 = h'p,$$

h et h' étant des entiers supérieurs à l'unité. Le point O est alors de seconde espèce et de troisième catégorie pour l'involution I' existant sur une surface F_1.

Les courbes (F_1, F_{00}) passent $\lambda_1 + \mu_1$ fois par le point O, λ_1 fois par les points $(v,1), (v,2), \ldots, (v,x)$, y fois par $(v, x+1)$, a fois par $(v, x+2), \ldots, (v, u-1)$, un certain nombre de fois par une suite de points infiniment voisins successifs de $(v, x+1)$ et m fois par le dernier P de ces points, μ_1 fois par les points $(u,1), (u,2), \ldots, (u,x')$, y' fois par $(u, x'+1)$, μ'_1 fois par $(u, x'+2), \ldots, (u, v-1)$, un certain nombre de fois par une suite de points infiniment voisins successifs de $(u, x'+1)$, terminée par un point P' multiple d'ordre m'.

Comme dans le cas précédent, si nous posons

$$p = ub' + a', \quad (a' < u)$$

nous avons $\mu'_1 = b'$ et m' est le plus grand commun diviseur de $a' - \lambda_1$ et $\mu_1 - b'$.

Aux domaines des points $(u, v-1)$ et P' correspondent sur la surface Φ'_1 de Ω' homologue de F_1, des courbes rationnelles γ_1 d'ordre b' et τ'_1 d'ordre m'.

Lorsque la surface F_1 varie, ces courbes engendrent des surfaces Ψ_1 d'ordre b' et M'_1 d'ordre m'. On a en outre sur Ω' des surfaces Ψ'_1 d'ordre a et M_1 d'ordre m.

On sait que si sur la surface Ω'_1, on écrit les courbes précédentes dans l'ordre γ_1, τ'_1, τ_1, γ'_1, chacune d'elles rencontre la précédente et la suivante en un point mais ne rencontre pas les autres. Si par suite on écrit les surfaces qu'elles engendrent dans l'ordre Ψ_1, M'_1, M_1, Ψ'_1, chacune d'elles rencontre la précédente et la suivante suivant une droite mais ne rencontre pas les autres.

Le cône tangent en O' à la variété Ω comprend comme parties les cônes projetant ces surfaces de ce point O'.

5. Si nous supposons maintenant que le point O soit de seconde espèce et de troisième catégorie pour les involutions déterminées par H sur les surfaces F_1, F_α, F_β, on voit que le cône tangent à Ω au point O′ se scinde en douze cônes. On peut donc dire que:

Dans le cas général, le cône tangent en un point O′ *à la variété* Ω *se scinde en 12 cônes rationnels.*

Liège, le 9 avril 1974.