GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur une propriété de la variété des cordes d'une surface de Veronese,

par Lucien Godeaux, Membre de l'Académie.

Dans cette note, nous établissons une propriété des variétés découpées sur la variété des cordes d'une surface de Veronese par les hypersurfaces de l'espace ambiant. Entre la variété de Segre qui représente les couples de points de deux plans (ou les couples ordonnés de points d'un plan) et la variété des couples de points non ordonnés d'un plan (c'est-à-dire la variété des cordes d'une surface de Veronese) existe une correspondance (2.1) ayant pour surface de diramation la surface de Veronese. Il est aisé de passer des propriétés des sections de la variété de Segre par des hypersurfaces à celles des sections de la seconde variété par des hypersurfaces. Nous avons déjà eu l'occasion d'étudier les premières antérieurement et nous en déduisons les secondes. Notons par exemple que la section de la variété des cordes d'une surface de Veronese par une hypersurface cubique est une variété dont les surfaces canoniques et pluricanoniques sont d'ordre zéro.

1. Soient σ_1, σ_2 deux plans et V_4 la variété de Segre représentant les couples de points de ces deux plans. La variété V_4^6 appartient à un espace linéaire S_8 à huit dimensions.

Représentons par y_1, y_2, y_3 les coordonnées d'un point y de σ_1, par z_1, z_2, z_3 celles d'un point z de σ_2 et posons

$$\rho X_{ik} = y_i z_k , \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

Au couple de points y, z, correspond le point X de la variété V_4^6 et les équations de cette variété s'obtiennent en exprimant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{vmatrix}$$

est de caractéristique un.

L'homographie

$$\rho y_i = z_i , \qquad (i = 1, 2, 3)$$

donne naissance à une homographie Ω

$$\rho X_{ik} = X_{ki} , \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

de S_8, transformant V_4^6 en elle-même.

Les axes ponctuels de l'homographie Ω sont :

1° Un espace S_5, à cinq dimensions, d'équations

$$X_{23} - X_{32} = 0 , \quad X_{31} - X_{13} = 0 , \quad X_{12} - X_{21} = 0 ,$$

coupant V_4^6 suivant une surface de Veronese;

2° Un plan S_2, d'équations

$$X_{11} = X_{22} = X_{33} = 0 ,$$
$$X_{23} + X_{32} = 0 , \quad X_{31} + X_{13} = 0 , \quad X_{12} + X_{21} = 0 ,$$

ne rencontrant pas V_4^6 .

Pour obtenir une image de l'involution I_2 engendrée sur V_4 par Ω, rapportons projectivement aux hyperplans d'un espace S_5 les hyperplans de S_8 passant par S_2. A cet effet, posons

$$\rho Y_{ik} = X_{ik} + X_{ki} , \quad (Y_{ik} = Y_{ki}) , \quad (i, k = 1, 2, 3) .$$

L'image de l'involution est la variété M_4^3,

$$\begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{31} \\ Y_{12} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{23} & Y_{33} \end{vmatrix} = 0$$

des cordes d'une surface de Veronese Ψ (1). Celle-ci est comme on sait double pour la variété M_4^3 et ses points correspondent à ceux de la surface de Veronese, section de V_4^6 par l'axe S_5 de Ω, points qui sont unis pour l'involution considérée.

2. Considérons dans l'espace S_8 une hypersurface cubique V_7^3. Nous avons démontré (2) que la variété V_3^{18}, intersection des variétés V_4^6, V_7^3 possédait des surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro et que, par conséquent ses sections hyperplanes F étaient des surfaces projectivement canoniques. Les caractères des surfaces F sont $p_a = p_g = 8$, $p^{(1)} = 19$.

Envisageons en particulier une hypersurface V^3 transformée en elle-même par l'homographie Ω, ne passant pas par l'axe S_5 mais passant par conséquent par l'axe S_2 de Ω. L'équation de cette hypersurface contient des termes en X_{11}, X_{22}, X_{33} et, compte tenu des équations de la variété V_4^6, des termes en $X_{23} + X_{32}$, $X_{23}^2 + X_{32}^2$, $X_{23}^3 + X_{32}^3$, ..., $X_{12}^3 + X_{21}^3$. On a

$$X_{23}^2 + X_{32}^2 = (X_{23} + X_{32})^2 - 2\, X_{11}\, X_{22}\,,$$
$$X_{23}^3 + X_{32}^3 = (X_{23} + X_{32})^3 - 3\, X_{11}\, X_{22}\, (X_{23} + X_{32})\,, \ldots$$

Il en résulte que, en introduisant les variables Y, l'équation de la variété V envisagée sera un polynome complet du troisième degré égalé à zéro. Dans l'espace S_5, cette

(1) *Sur la variété des cordes d'une surface de Veronese* (*Bull. de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1936, pp. 244-246).

(2) *Sur une surface canonique appartenant à la variété de Segre représentant les couples de points de deux plans* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1936, pp. 1223-1225).

équation représentera une hypersurface cubique générale V_4^3.

L'involution d'ordre deux, engendrée sur la variété V_3^{18} par Ω, a donc pour image dans S_5, la variété V_3^9 intersection de M_4^3 et de V_4^3. Cette variété V_3^9 possède une courbe double du douzième ordre, tracée sur la surface de Veronese Ψ.

A une section hyperplane Φ de la variété V_3^9 correspond, sur V_3^{18}, une section F de cette variété passant par l'axe S_2 de Ω. Sur F, Ω engendre une involution I_2 du second ordre n'ayant qu'un nombre fini de points unis, à savoir les douze points de rencontre de F avec la surface de Veronese, section de V_4^6 par l'axe S_5 de Ω.

Aux sections hyperplanes de Φ correspondent les sections de F par les hyperplans passant par S_2. Ces sections étant les courbes canoniques de F, les courbes canoniques de Φ sont donc les sections hyperplanes de cette surface et celle-ci est une surface projectivement canonique.

Sur la variété V_3^9, le système $|\Phi|$ des sections hyperplanes est son propre adjoint, par conséquent cette variété possède des surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro.

Les caractères invariants de la surface Φ se calculent en fonction de ceux de F au moyen des formules que nous avons données autrefois [1], soit encore directement. On a

$$p_a = p_g = 5\,, \quad p^{(1)} = 10\,.$$

La section de la variété des cordes d'une surface de Veronese par une hypersurface cubique est une variété V_3^9 *dont les surfaces canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro. Les sections hyperplanes de la variété* V_3^9 *sont des surfaces projectivement canoniques de genres* $p_a = p_g = 5$, $p^{(1)} = 10$.

3. Aux hyperplans de S_8 passant par l'axe S_5 de Ω correspondent dans S_5 des hyperquadriques en nombre ∞^2 passant

[1] *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1914, pp. 289-312).

par la surface Ψ, dont l'enveloppe est la variété M_4^3 (²). Désignons par F_1 les surfaces découpées par ces hyperplans sur la variété V_3^{18} et par Φ_1 les surfaces qui leur correspondent sur la variété V_3^9. Les surfaces Φ_1 forment un réseau $|\Phi_1|$ qui est son propre adjoint et le long d'une de ces surfaces, il y a une hyperquadrique circonscrite à la variété V_3^9.

L'hypersurface V_7^3 coupe la surface de Veronese, section de V_4^6 par l'axe S_5 de Ω, suivant une courbe C d'ordre douze et de genre dix, appartenant à V_3^{18}. A cette courbe correspond sur V_3^9 une courbe Γ d'ordre douze et de genre dix, double pour cette variété et appartenant à la surface Ψ. Les surfaces F_1 passent par la courbe C et les surfaces Φ_1 par la courbe Γ.

Les courbes canoniques d'une surface Φ_1 sont découpées sur celle-ci par les autres surfaces du réseau $|\Phi_1|$; elles forment par conséquent un faisceau et les surfaces Φ_1 sont donc de genres $p_a = p_g = 2$.

Trois hyperplans de S_8 n'appartenant pas à un même faisceau et passant par S_5 n'ont que cet espace en commun. On en déduit que le faisceau des courbes canoniques d'une surface Φ_1 est dépourvu de points-base. Par conséquent ces courbes sont elliptiques et le genre linéaire des surfaces Φ_1 est $p^{(1)} = 1$.

Soient p le genre de la courbe commune à deux surfaces F_1 en dehors de C et α le nombre de points de rencontre de cette courbe avec C. On a

$$p + \alpha = 10\,, \quad \alpha = 2\,(p-1)\,,$$

d'où $p = 4$ et $\alpha = 6$.

Les courbes (F, F_1) sont transformées en elles-mêmes par Ω et coupent C en douze points; par conséquent, d'après la formule de Zeuthen, les courbes (Φ, Φ_1) sont de genre

(²) *Sur la variété des cordes...* (*loc. cit*).

sept et les surfaces Φ_1 ont des sections hyperplanes de genre sept.

Les surfaces Φ_1 sont d'ailleurs d'ordre neuf.

4. Considérons maintenant la section de V_4^6 par une hypersurface V_7^n d'ordre $n \geqslant 3$; c'est une variété V_3^{6n} d'ordre $6n$, sur laquelle le système canonique est découpé par les hypersurfaces d'ordre $n-3$ [1]. Considérons en particulier une hypersurface V_7^n transformée en elle-même par Ω, passant par l'axe S_2 mais non par l'axe S_5 de cette homographie. En raisonnant comme dans le cas de la variété V_7^3 et en introduisant les coordonnées Y, on voit que l'on peut représenter cette variété V_7^n par une forme algébrique complète de degré n, égalée à zéro, par rapport aux Y. Dans S_5, cette équation représente une variété V_4^n d'ordre n.

L'involution engendrée par Ω sur la variété V_3^6 a pour image la variété V_3^{3n} intersection de M_4^3 avec la variété V_4^n. Cette variété V_3^{3n} passe doublement par l'intersection de V_4^n avec la surface de Veronese Ψ, c'est-à-dire par une courbe d'ordre $4n$ et de genre $(n-1)(2n-1)$.

Envisageons une hypersurface V_7^{n-3} d'ordre $n-3$, transformée en elle-même par Ω, passant par l'axe S_2 mais non par l'axe S_5 de cette homographie. Soit V_4^{n-3} l'hypersurface de S_5 déduite de V_7^{n-3} comme V_4^n a été déduite de V_7^n. La section de V_3^{6n} par $V_3^{6(n-3)}$ est une surface canonique de la première de ces variétés. A cette surface canonique correspond une surface canonique de la variété V_3^{3n}, donc :

La variété V_3^{3n} *section de la variété* M_4^3 *des cordes d'une surface de Veronese par une hypersurface* V_4^n *d'ordre* n, *a comme surfaces canoniques, les surfaces découpées par les hypersurfaces d'ordre* n — 3.

---

(1) *Sur une surface canonique...* (*loc. cit.*). Voir également : *Sur les variétés de Segre représentant les points de* n *plans* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1939, pp. 8-15); *Sur les variétés de Segre représentant les couples de points de deux espaces à* n *dimensions* (*Bull. de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1938, pp. 592-594).

Ce théorème peut être établi par une autre voie.

Les hypersurfaces V_4^n découpent, sur V_3^9, un système qui est son propre adjoint. Si donc nous désignons par G la surface découpée sur V_3^9 par une hypersurface V_4^n, le système canonique de G est découpé par les hypersurfaces d'ordre n.

Cela étant, considérons le système linéaire $|G|$ découpé sur la variété V_3^{3n} par les hypersurfaces cubiques de S_5. L'adjoint $|G'|$ de $|G|$ est découpé sur V_3^{3n} par les hypersurfaces d'ordre n; par conséquent, le système canonique $|G'-G|$ sera découpé par les hypersurfaces d'ordre $n-3$.