Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 4 juillet 1942, n[os] 7-9.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur la surface du quatrième ordre contenant une droite et une conique,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Dans ses recherches sur la base des courbes tracées sur une surface algébrique (1), M. Severi a montré que si une surface régulière possède un groupe infini discontinu de transformations birationnelles en elle-même, ce groupe est isomorphe au groupe de substitutions de module ± 1 d'une forme quadratique en elle-même. Il a appliqué ce théorème à la détermination des transformations birationnelles en elle-même de la surface du quatrième ordre contenant une sextique de genre deux, surface déjà considérée par M. Fano (2). D'autres surfaces du quatrième ordre qui, comme la précédente, ont le nombre-base $\rho = 2$, ont été considérées par d'autres géomètres. M. Fano a également considéré des surfaces du quatrième ordre dont le nombre-base est $\rho = 3$ (3). C'est à une étude du même genre qu'est consacrée la présente note.

(1) *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica* (Mathem. Annalen, 1906, Bd. LXII, pp. 194-225). *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique* (Annales scient. de l'École normale supérieure, 1908, pp. 449-468). *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica* (Rend. Circolo Matematico di Palermo, 1910, t. XXX, p. 265-289).

(2) *Sopra alcune superficie del 4° ordine rappresentabili sul piano doppio* (Rend. R. Istituto Lombardo, 1906, pp. 1071-1086).

(3) *Superficie del 4° ordine con gruppi infiniti discontinui di trasformazioni birazionali* (Rend. R. Accad. Lincei, 1920, 1° sem., pp. 408-415, 485-491; 2° sem., pp. 113-118, 175-182, 231-236).

Nous considérons la surface du quatrième ordre assujettie à la seule condition de contenir une droite et une conique ne se rencontrant pas. Nous établissons les propriétés suivantes :

La surface du quatrième ordre contenant une droite et une conique ne se rencontrant pas, ne possède qu'un seul faisceau de courbes elliptiques irréductibles. Elle possède un groupe infini discontinu de transformations birationnelles en elle-même laissant invariante chaque courbe de ce faisceau. Il existe, sur la surface, une infinité (discontinue) de courbes rationnelles rencontrées en un seul point variable par les plans passant par la droite. Chacune de ces courbes et la droite sont les lignes singulières d'une congruence linéaire dont les droites coupent encore la surface aux couples de points d'une involution. On peut engendrer le groupe de transformations birationnelles de la surface en partant de trois de ces involutions.

On sait que la surface du quatrième ordre contenant une conique ne possède pas en général de transformation birationnelle en elle-même [1]. L'adjonction d'une droite tracée sur la surface fait naître des transformations.

1. Soit F une surface du quatrième ordre assujettie à la seule condition de contenir une droite et une conique ne se rencontrant pas. Désignons par C les sections planes de F, par C_1 la droite et par C_2 la conique.

Les plans passant par C_1 coupent F suivant des cubiques que nous désignerons par

$$C_3 \equiv C - C_1.$$

Le plan de C_2 coupe F suivant une seconde conique

$$C_4 \equiv C - C_2,$$

rencontrant C_1 en un point.

[1] Voir notre note *Sur la surface du quatrième ordre contenant une conique* (Bulletin de la Soc. roy. des Sciences de Liége, 1912, pp. 331-335).

Observons qu'il est équivalent d'imposer à la surface F de contenir une droite C_1 et une conique C_4 coupant cette droite en un point.

La surface F a le nombre-base $\rho = 3$ et les courbes C, C_1, C_2 constituent une base de déterminant

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 26.$$

Une base intermédiaire de F a un déterminant diviseur de 26 et le rapport doit être un carré parfait, par conséquent les courbes C, C_1, C_2 forment une base intermédiaire de F et comme la division est univoque sur une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), une base minima.

Une courbe C_0, de genre π, tracée sur F, satisfait à la relation fonctionnelle

$$C_0 \equiv \lambda C + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2,$$

λ, λ_1, λ_2 étant des entiers satisfaisant à l'équation

$$2\pi - 2 = 4\lambda^2 - 2\lambda_1^2 - 2\lambda_2^2 + 2\lambda\lambda_1 + 4\lambda\lambda_2,$$

ou

$$\pi - 1 = 2\lambda^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda\lambda_1 + 2\lambda\lambda_2.$$

2. Un plan ϖ passant par C_1 coupe C_2 en deux points P_1, P_2 et C_4 en un point P_0. Ce dernier point est rationnellement déterminé sur la cubique C_3 située dans le plan ϖ. L'involution déterminée sur C_3 par les droites passant par P_0 est donc rationnellement déterminée sur C_3. En d'autres termes, nous avons sur F une involution, dont les couples de points sont d'ailleurs découpés par les droites s'appuyant sur C_1 et C_4, droites qui forment une congruence linéaire.

Désignons par T_1 la transformation birationnelle de F en soi génératrice de cette involution. Soient C', C_1',

C_2' les courbes que T_1 fait correspondre respectivement à C, C_1, C_2.

Observons que les courbes C_2 et C_3 sont transformées en elles-mêmes. On a donc

$$C_2' \equiv C_2, \qquad C' - C_1' \equiv C - C_1.$$

Les droites s'appuyant sur C_1, C_4 et sur une section plane C de F forment une surface du huitième ordre passant cinq fois par C_1, trois fois par C_4 et une fois par C. Cette surface coupe F suivant une courbe équivalente à $8C$, composée des courbes $5C_1$, $3C_4$, de la courbe C considérée et de sa transformée C'. On a donc

$$8C \equiv 5C_1 + 3C_4 + C + C'.$$

On en déduit

$$\left.\begin{aligned} C' &\equiv 4C - 5C_1 + 3C_2, \\ C_1' &\equiv 3C - 4C_1 + 3C_2, \\ C_2' &\equiv C_2. \end{aligned}\right\} (T_1)$$

La substitution

$$\begin{aligned} \lambda' &= 4\lambda + 3\lambda_1, \\ \lambda_1' &= -5\lambda - 4\lambda_1, \\ \lambda_2' &= 3\lambda + 3\lambda_1 + \lambda_2 \end{aligned}$$

transforme en elle-même la forme quadratique fondamentale

$$\phi(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \equiv 2\lambda^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda\lambda_1 + 2\lambda\lambda_2$$

de la surface F. Cette substitution a pour module -1.

3. Sur la cubique C_3 générique, le tangentiel P_0' de P_0 est rationnellement déterminé. On peut donc définir rationnellement une seconde involution, dont les couples sont découpés sur C_3 par les droites passant par P_0'. Le lieu de P_0' est la courbe que T_1 fait correspondre à C_4, c'est-à-dire la courbe

$$C'_4 \equiv 4C - 5C_1 + 2C_2.$$

C'est une courbe du quinzième ordre, s'appuyant en quatorze points sur C_1 et en quatre points sur C_2.

Les droites s'appuyant sur C_1 et C'_4, forment une congruence linéaire et découpent sur F les groupes de l'involution considérée. Nous désignerons par T_2 la transformation génératrice de cette involution.

Appelons maintenant C', C'_1, C'_2 les transformées de C, C_1, C_2 par T_2. Remarquons que T_2 laisse invariantes les courbes C_3, C_4 ; on a donc

$$C' - C'_1 \equiv C - C_1, \qquad C' - C'_2 \equiv C - C_2.$$

Les droites s'appuyant sur C_1, C'_4 et sur une section plane C de F engendrent une réglée d'ordre 34 passant 31 fois par C_1, trois fois par C'_4 et une fois par la courbe C considérée. En dehors de ces courbes, elle coupe F suivant la courbe C'. On a donc

$$34C \equiv 31C_1 + 3C'_4 + C + C'.$$

On en déduit

$$\left.\begin{aligned} C' &\equiv 21C - 16C_1 - 6C_2, \\ C'_1 &\equiv 20C - 15C_1 - 6C_2, \\ C'_2 &\equiv 20C - 16C_1 - 5C_2. \end{aligned}\right\} \quad (T_2).$$

La substitution

$$\begin{aligned} \lambda' &= 21\lambda + 20\lambda_1 + 20\lambda_2, \\ \lambda'_1 &= -16\lambda - 15\lambda_1 - 16\lambda_2, \\ \lambda'_2 &= -6\lambda - 6\lambda_1 - 5\lambda_2, \end{aligned}$$

de module -1, transforme la forme quadratique ϕ en elle-même.

4. Considérons une courbe générique C_3 et soit u l'intégrale elliptique de première espèce attachée à cette courbe. Désignons par u_1, u_2, u_3 les valeurs de u aux points de rencontre de C_3 avec C_1, par v_1, v_2 les valeurs de u aux points de rencontre de C_3 avec C_2, par v_0 la valeur de u au point de rencontre de C_3 et de C_4.

Sur la courbe C_3, on a une transformation de première espèce définie par

$$u' \equiv u + u_1 + u_2 + u_3 - 3v_0, \quad \text{(mod. périodes)}.$$

Les transformations T_1, T_2 donnent sur C_3 respectivement

$$u' + u \equiv v_1 + v_2, \quad \text{(mod périodes)},$$
$$u' + u \equiv 2v_0. \quad \text{(mod. périodes)}$$

Le produit de T_2 par T_1 donne sur C_3 la transformation

$$u' \equiv u + v_1 + v_2 - 2v_0, \quad \text{(mod. périodes)}$$

c'est-à-dire, comme on a

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv v_1 + v_2 + v_0, \quad \text{(mod. périodes)}$$
$$u' \equiv u + u_1 + u_2 + u_3 - 3v_0, \quad \text{(mod. périodes)}.$$

Nous retrouvons donc la transformation primitive.

La transformation $T = T_2T_1$ donne sur F,

$$C' \equiv 44C - 37C_1 - 9C_2,$$
$$C'_1 \equiv 43C - 36C_1 - 9C_2,$$
$$C'_2 \equiv 20C - 16C_1 - 5C_2.$$

La substitution

$$\lambda' = 44\lambda + 43\lambda_1 + 20\lambda_2,$$
$$\lambda'_1 = -37\lambda - 36\lambda_1 - 16\lambda_2,$$
$$\lambda'_2 = -9\lambda - 9\lambda_1 - 5\lambda_2,$$

de module $+1$, transforme la forme quadratique ϕ en elle-même.

On a d'ailleurs

$$C' - C'_1 \equiv C - C_1.$$

Observons que la courbe C'_1 s'appuie en onze points sur la courbe C_4. Une courbe C_3 passant par un de ces.

points d'appui possède un point d'inflexion en P_0 et sur cette courbe, la transformation T donne l'identité.

5. Soit, sur une courbe C_3, P''_0 le tangentiel du point P'_0. Le lieu du point P''_0 est la courbe C''_4 que T_2 fait correspondre à la courbe C'_4, c'est-à-dire

$$C''_4 \equiv 24C - 21C_1 - 4C_2.$$

C'est une courbe d'ordre 67 s'appuyant en 66 points sur C_1 et en 56 points sur C_2. Les droites s'appuyant sur C_1 et C''_4 forment une congruence linéaire et coupent encore F en des couples de points d'une involution. Désignons par T_3 la transformation génératrice de cette involution.

Si C', C'_1, C'_2 sont les courbes que T_3 fait correspondre à C, C_1, C_2, on a

$$C' - C_1 \equiv C - C_1, \qquad 4C' - 5C'_1 + 2C'_2 \equiv 4C - 5C_1 + 2C_2.$$

En raisonnant comme plus haut, on trouve la relation

$$138C \equiv 135C_1 + 3C''_4 + C' + C,$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} C' &\equiv 65C - 72C_1 + 12C_2, \\ C'_1 &\equiv 64C - 71C_1 + 12C_2, \\ C'_2 &\equiv 32C - 36C_1 + 7C_2. \end{aligned}\right\} (T_3).$$

Ces formules conduisent à une substitution automorphe, de module -1, de la forme quadratique ϕ.

6. Les transformations T_1, T_2, T_3 appartiennent au même type ; les couples de points homologues sont découpés sur F par les droites s'appuyant sur C_1 et sur une courbe K d'ordre n rencontrant C_1 en $n-1$ points. Il existe d'autres transformations analogues et pour les obtenir, nous sommes conduit à déterminer les courbes

$$K \equiv \lambda C + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$$

tracées sur F, d'ordre

$$n = 4\lambda + \lambda_1 + 2\lambda_2$$

s'appuyant en

$$n - 1 = \lambda - 2\lambda_1$$

points sur la droite C_1. Les entiers λ, λ_1, λ_2 doivent donc satisfaire à la relation

$$3(\lambda + \lambda_1) + 2\lambda_2 = 1$$

et à une seconde relation

$$2\lambda^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda\lambda_1 + 2\lambda\lambda_2 = -1,$$

exprimant que la courbe K est rationnelle.

L'élimination de λ_2 entre ces équations conduit à

$$13(\lambda + \lambda_1)^2 - 6(\lambda + \lambda_1) - 4\lambda - 3 = 0.$$

En écrivant que $52\lambda + 48$, discriminant de cette équation, est un carré parfait, on est conduit à poser

$$\lambda = 12\epsilon^2 + 10\epsilon + 1,$$

ϵ étant un entier. On en déduit

$$\lambda_1 = -(13\epsilon^2 + 8\epsilon), \qquad \lambda_2 = -(3\epsilon + 1).$$

Nous représenterons par K_ϵ la courbe obtenue ; on a

$$K_\epsilon \equiv (13\epsilon^2 + 10\epsilon + 1)C - (13\epsilon^2 + 8\epsilon)C_1 - (3\epsilon + 1)C_2.$$

On a d'ailleurs

$$K_0 \equiv C_4, \qquad K_{-1} \equiv C_4', \; K_1 \equiv C_4''.$$

Désignons par S_ϵ la transformation birationnelle involutive dont les couples de points homologues sont découpés sur F par les droites s'appuyant sur C_1 et K_ϵ. Si C', C_1', C_2' sont les courbes que S_ϵ fait correspondre à C, C_1, C_2, on a

$$C' - C_1' \equiv C - C_1.$$

En considérant l'intersection de F avec la surface lieu des droites s'appuyant sur la droite C_1, la courbe K_ϵ et une courbe C, on trouve

$$(2n+4)C \equiv (2n+1)C_1 + 3K_\epsilon + C + C'.$$

On a

$$n = 39\epsilon^2 + 26\epsilon + 2.$$

De même, en considérant l'intersection de la surface F avec la surface d'ordre

$$n' = 52\epsilon^2 + 26\epsilon + 2$$

lieu des droites s'appuyant sur C_1, C_2 et sur K_ϵ, on obtient la relation fonctionnelle

$$n'C \equiv (n'-2)C_1 + 2K_\epsilon + C_2' + C_2.$$

De ces relations, on déduit

$$\left.\begin{aligned} C' &\equiv (39\epsilon^2 + 22\epsilon + 4)C \\ &\quad - (39\epsilon^2 + 28\epsilon + 5)C_1 + 3(3\epsilon + 1)C_2, \\ C_1' &\equiv (39\epsilon^2 + 22\epsilon + 3)C \\ &\quad - (39\epsilon^2 + 28\epsilon + 4)C_1 + 3(3\epsilon + 1)C_2, \\ C_2' &\equiv (26\epsilon^2 + 6\epsilon)C \\ &\quad - (26\epsilon^2 + 10\epsilon)C_1 + (6\epsilon + 1)C_2. \end{aligned}\right\} (S_\epsilon)$$

Ces relations donnent une substitution automorphe de module -1 de la forme quadratique ϕ.

Le produit de deux transformations S_ϵ, S_η est une transformation non périodique, laissant invariantes les courbes C_3.

7. La surface F contient un faisceau de courbes elliptiques

$$|C_3| = |C - C_1|.$$

Supposons qu'elle puisse en contenir un autre,

$$|\lambda C + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2|,$$

λ, λ_1, λ_2 étant des entiers satisfaisant à l'équation

$$2\lambda^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda\lambda_1 + 2\lambda\lambda_2 = 0. \qquad (1)$$

On satisfait à l'équation (1) en prenant soit $\lambda_1 = -\lambda$,

$\lambda_2 = 0$, soit $\lambda = -2\lambda_1 = -2\lambda_2$. On obtient ainsi le faisceau $|\lambda C_3|$, multiple de $|C_3|$ et le faisceau

$$|\lambda(2C - C_1 - C_2)|,$$

composé de courbes réductibles en les courbes λC_3 et $\lambda(C - C_2)$.

Nous rechercherons les courbes elliptiques irréductibles appartenant à F, ce qui implique que l'ordre de ces courbes et les nombres de leurs points de rencontre avec C_1, soient positifs.

Posons

$$\lambda = \mu, \quad \lambda_1 = \mu_1 - \mu, \quad \lambda_2 = \mu_2,$$

de telle sorte que la courbe considérée soit représentée par

$$\mu C_3 + \mu_1 C_1 + \mu_2 C_2.$$

La relation (1) devient

$$-\mu_1^2 - \mu_2^2 + 3\mu\mu_1 + 2\mu\mu_2 = 0, \tag{2}$$

qu'il s'agit de résoudre en nombres entiers.

Écartons la solution $\mu_1 = \mu_2 = 0$, qui conduit à $|C_3|$. On a

$$\mu = \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{3\mu_1 + 2\mu_2}.$$

Les solutions en nombres entiers (2) sont données par

$$\mu = k(u^2 + v^2), \quad \mu_1 = ku(3u + 2v), \quad \mu_2 = kv(3u+2v),$$

u et v étant des entiers et k une fraction.

La courbe considérée est

$$E \equiv k[(u^2 + v^2)C + u(3u + 2v)C_1 + v(3u + 2v)C_2].$$

L'ordre de la courbe E est égal à

$$k(6u^2 + 8uv + 7v^2) > 0.$$

La forme entre parenthèses est définie positive, donc on a $k > 0$.

La courbe E rencontre la droite C_1 en

$$k(3v^2 - 4uv - 3u^2) > 0$$

points et la courbe C_2 en

$$k(2u^2 - 6uv - 2v^2) > 0$$

points. Le rapport $\frac{v}{u}$ doit donc être extérieur aux racines de

$$3v^2 - 4uv - 3u^2.$$

et compris entre les racines de

$$2v^2 + 6uv - 2u^2$$

On en conclut que u et v doivent être de signes contraires.

A la courbe E, la transformation T_1 fait correspondre la courbe

$$\begin{aligned} E' \equiv k[(10u^2 + 6uv + v^2)C_3 - u(3u + 2v)C_1 \\ + (9u^2 + 9uv + 2v^2)C_2] \end{aligned}$$

On peut écrire cette relation sous la forme.

$$E' \equiv k[(u'^2 + v'^2)C_3 + u'(3u' + 2v')C_1 + v'(3u' + 2v')C_2]$$

en posant

$$u' = -u, \quad v' = 3u + v.$$

On en conclut que si l'on considère une courbe elliptique distincte de λC_3, on peut toujours supposer $u > 0$, quitte à remplacer cette courbe par sa transformée par T_1.

A la courbe E, T_2 fait correspondre la courbe

$$\begin{aligned} E'' \equiv k[(130u^2 + 146uv + 41v^2)C + (3u + 2v)(7u + 4v)C_1 \\ - (3u + 2v)(9u + 5v)C_2]. \end{aligned}$$

Cette courbe peut être représentée par

$$\begin{aligned} E'' \equiv k[(u''^2 + v''^2)C + u''(3u'' + 2v'')C_1 \\ + v''(3u'' + 2v'')C_2] \end{aligned}$$

en posant

$$u'' = 7u + 4v, \qquad '' = -9u - 5v.$$

On peut donc également supposer $v > 0$ dans la représentation de E.

En d'autres termes, on peut supposer que u et v sont de même signe, alors qu'ils doivent être de signes contraires. On en conclut que :

La surface F *ne contient qu'un seul faisceau irréductible de courbes elliptiques, le faisceau* $|C - C_1|$.

8. Soit τ une transformation birationnelle de la surface F en soi. Puisque cette surface contient un seul faisceau de courbes elliptiques, celui-ci doit donc être transformé en lui-même par τ.

Supposons en premier lieu que τ transforme chaque courbe C_3 en elle-même.

Si sur toute courbe C_3, τ détermine une transformation de seconde espèce, τ est involutive et les droites joignant les couples de points homologues engendrent nécessairement une congruence linéaire ayant comme courbes singulières la droite C_1 et une courbe K d'ordre n s'appuyant en $n - 1$ points sur C_1. Alors, τ coïncide avec une transformation S_ϵ.

Si τ détermine sur chaque courbe C_3 une transformation de première espèce, le produit τT_1 est une transformation de seconde espèce sur toute courbe C_3, c'est-à-dire sur F, une transformation S_ϵ.

Supposons maintenant que τ échange entre elles les courbes C_3. A C_1, τ fait correspondre une courbe C_1' rencontrant en trois points les courbes C_3 et à C_2, une courbe C_2' rencontrant en deux points les courbes C_3. Nous allons en premier lieu déterminer les courbes C_1', C_2' jouissant de ces propriétés.

9. Soit

$$C'_1 \equiv \mu C_3 + \mu_1 C_1 + \mu_2 C_2.$$

La courbe étant rationnelle, on a

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu(3\mu_1 + 2\mu_2) = 1.$$

Les points de rencontre de C_1' avec C_3 sont au nombre de

$$3\mu_1 + 2\mu_2 = 3.$$

μ_2 est multiple de 3. En exprimant ensuite que

$$\mu = \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 - 1}{3}$$

est entier, on est conduit à poser

$$\mu_2 = 9u, \qquad \text{ou} \qquad \mu_2 = 9u + 3.$$

On trouve donc deux solutions :

a) $\quad C_1' \equiv u(39u - 4)C_3 - (6u - 1)C_1 + 9uC_2$;

b) $\quad C_1' \equiv (3u + 1)(13u + 3)C_3$
$$- (6u + 1)C_1 + (9u + 3)C_2$$

Posons maintenant

$$C_2' \equiv \nu C_3 + \nu_1 C_1 + \nu_2 C_2$$

On a cette fois

$$3\nu_1 + 2\nu_2 = 2.$$

ν_1 est pair et en exprimant que ν est entier, on trouve que ν est un multiple de 4. On a donc

$$C_2' \equiv 2\nu(13\nu - 3)C_3 + 4\nu C_1 - (6\nu - 1)C_2.$$

10. La transformation τ correspond à une substitution unimodulaire de la forme quadratique ϕ, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1 = \pm 1.$$

Si l'on prend pour la courbe C_1' le cas *a*), on trouve $v = -u$ et le module $+ 1$. On a la transformation

$$\left.\begin{aligned} C'_3 &\equiv C_3, \\ C'_1 &\equiv u(39u-4)C_3-(6u-1)C_1+9uC_2, \\ C'_2 &\equiv 2u(13u+3)C_3-4uC_1+(6u+1)C_2. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

Si l'on se place, pour la courbe C'_1, dans le cas *b*) on trouve encore $v = -u$, mais le module -1. On obtient la transformation

$$\left.\begin{aligned} C'_3 &\equiv C_3, \\ C'_1 &\equiv (3u+1)(13u+3)C_3 \\ &\qquad -(6u+1)C_1+(9u+3)C_2, \\ C'_2 &\equiv 2u(13u+3)C_3-4uC_1+(6u+1)C_2. \end{aligned}\right| \quad (\mathrm{II})$$

On doit évidemment retrouver, parmi les transformations τ trouvées, les transformations S_2 et $S_\epsilon S_\eta$. On voit immédiatement que la transformation (II) coïncide avec S_ϵ, en posant $u = \epsilon$.

D'autre part, en faisant le produit des transformations (I) et (II), on retrouve la transformation T_1. Par conséquent, toutes les transformations birationnelles de la surface F en elle-même, laissent invariantes les courbes C_3.

La surface F *contient un groupe infini discontinu de transformations birationnelles en elle-même, engendré par trois transformations birationnelles involutives. Toutes ces transformations laissent invariante chacune des courbes* C_3.

Liége, le 1er juillet 1942.