GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les surfaces du quatrième ordre, circonscrites à deux tétraèdres de Moebius,

par Lucien GODEAUX, Membre de l'Académie.

Les surfaces du quatrième ordre dont nous nous occupons dans cette note passent doublement par les sommets de deux tétraèdres de Moebius $R_1R_2R_3R_4$, $R_1'R_2'R_3'R_4'$ et contiennent les quatre droites R_1R_1', R_2R_2', R_3R_3', R_4R_4'. Elles ont été rencontrées par M. Remy (1) dans ses études sur les surfaces hyperelliptiques.

Une telle surface, Φ, est de genres un ($p_a = P_4 = 1$) ; elle contient huit droites β_1, β_2, β_3, β_4, β_1', β_2', β_3', β_4', ne se rencontrant pas deux-à-deux et ne passant pas par les points doubles. Chacun de ceux-ci est équivalent à une courbe rationnelle de degré -2; nous désignons par α_1, α_2, α_3, α_4, α_1', α_2', α_3', α_4' ces huit courbes rationnelles.

Nous démontrons qu'*il existe une transformée biration-*

(1) *Sur les surfaces hyperelliptiques définies par les fonctions intermédiaires singulières* (C. R., 26 mars 1906, pp. 768-770); *Sur deux surfaces du quatrième ordre liées à l'octuple gauche complet* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1907, pp. 6-19).

nelle de Φ, du quatrième ordre, passant doublement par les sommets de deux tétraèdres $S_1S_2S_3S_4$, $S_1'S_2'S_3'S_4'$, *de Moebius et contenant les droites* S_1S_1', S_2S_2', S_3S_3', S_4S_4'.

Sur cette surface Φ', les points doubles sont équivalents aux courbes β_1, β_2, β_3, β_4, β_1', β_2', β_3', β_4' et la surface contient huit droites qui correspondent aux courbes α_1, α_2, α_3, α_4, α_1', α_2', α_3', α_4'.

Nous établissons ensuite que la surface Φ est hyperelliptique et représente précisément une involution du second ordre appartenant à une surface de Picard ($p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$), les points de diramation sur la surface Φ étant équivalents aux seize courbes α, α', β, β'.

Nous montrons également que la surface Φ représente des involutions du second ordre appartenant à deux surfaces de genres un que nous démontrons être également hyperelliptiques.

Chemin faisant, nous établissons également quelques propriétés des surfaces du quatrième ordre assujetties à la seule condition d'avoir des points doubles aux sommets de deux tétraèdres de Moebius.

1. Soient $R_1R_2R_3R_4$ et $R_1'R_2'R_3'R_4'$ deux tétraèdres de Moebius; désignons par ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 les faces du premier, par ρ_1', ρ_2', ρ_3', ρ_4' celles du second, une face étant opposée au sommet de même indice. Les sommets de ces tétraèdres forment un groupe de Lamé, c'est-à-dire qu'ils sont les points-base d'un réseau de quadriques. Quatre de ces quadriques sont formées des couples de plans ρ_i, ρ_i' ($i = 1, 2, 3, 4$). Nous désignerons par Γ' les biquadratiques gauches passant par les huit sommets des deux tétraèdres.

Considérons une surface du quatrième ordre, Φ, ayant des points doubles aux sommets des deux tétraèdres. La surface Φ contient ∞^1 courbes Γ' formant un faisceau et toute quadrique passant par les points R et R' coupe Φ suivant deux courbes de ce faisceau.

Les surfaces du quatrième ordre analogues à Φ rencontrent celles-ci suivant des courbes du seizième ordre formées de quatre courbes Γ', par conséquent les surfaces analogues à Φ sont en nombre ∞^5.

Le long d'une courbe Γ' appartenant à Φ, il y a une quadrique touchant Φ. Par conséquent, si nous désignons par Γ les sections planes de Φ, nous avons la relation fonctionnelle

$$2\,\Gamma \equiv 2\,\Gamma' + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3' + \alpha_4',$$

où α_i est la courbe rationnelle infiniment petite équivalente, au point de vue des transformations birationnelles, au domaine du point double R_i sur la surface Φ, α_i' étant équivalente au domaine du point double R_i'.

Les tétraèdres $R_1R_2R_3R_4$ et $R_1'R_2'R_3'R_4'$ se correspondent dans une homographie biaxiale harmonique (1) dont les axes r, r' s'appuient sur les droites R_iR_i' et $\rho_i\rho_i'$ ($i=1$, 2, 3, 4). Chacune des quadriques circonscrites aux tétraèdres est transformée en elle-même par cette homographie et il en est par conséquent de même de la surface Φ. Sur celle-ci, l'homographie engendre une involution du second ordre possédant huit points unis et par conséquent de genres un ($p_a = P_4 = 1$) comme la surface Φ.

2. Supposons maintenant que la surface Φ contienne la droite R_1R_1'. Sur la surface, cette droite est une courbe de degré -2 que nous désignerons par γ_1. Il existe une courbe du faisceau $|\Gamma'|$ appartenant à Φ qui contient la droite γ_1 comme partie; elle est complétée par une cubique gauche γ_1' passant par les points R_2, R_3, R_4, R_1', R_2', R_3' et rencontrant en deux points γ_1.

Les surfaces du quatrième ordre passant doublement par les points R_i, R_i' et par la droite γ_1 contiennent γ_1' et coupent Φ suivant des courbes variables formées de trois courbes Γ'. Il y a donc ∞^4 de ces surfaces.

(1) Voir par exemple les nos 355 et suiv. de nos *Leçons de Géométrie projective* (Liége, Thone et Paris, Hermann, 1933).

On a

$$\Gamma' \equiv \gamma_1 + \gamma_1'$$

et

$$2(\Gamma - \gamma_1) \equiv 2\gamma_1' + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3' + \alpha_4' .$$

Nous allons dorénavant supposer que la surface Φ contient, outre la droite γ_1, les trois droites R_2R_2', R_3R_3', R_4R_4'; nous désignerons ces droites respectivement par γ_2, γ_3, γ_4.

La surface Φ contient en outre trois cubiques gauches γ_2', γ_3' γ_4' telles que

$$\gamma_2 + \gamma_2' \equiv \gamma_3 + \gamma_3' \equiv \gamma_4 + \gamma_4' \equiv \Gamma' .$$

Les surfaces du quatrième ordre passant doublement par les points R_i, R_i' et par les droites γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 ont encore en commun les cubiques gauches γ_1', γ_2', γ_3', γ_4'; ces surfaces forment donc un faisceau.

3. Un cône du second ordre, circonscrit à une courbe Γ', est transformé en lui-même par l'homographie biaxiale harmonique Ω, d'axes r, r'; son sommet se trouve donc sur l'une des droites r, r'. En particulier, le cône projetant la cubique γ_1' d'un de ses points d'appui sur γ_1 a son sommet sur une des droites r, r'; il en résulte que les points d'appui de la cubique γ_1' sur la droite γ_1 sont l'un sur r, l'autre sur r'.

Cela étant, la quadrique déterminée par les droites γ_2, γ_3, γ_4, qui sont des bisécantes de la cubique gauche γ_1', contient les droites r, r'; elle coupe donc γ_1' en huit points et contient cette courbe. La courbe

$$2\Gamma - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_2' - \alpha_3' - \alpha_4' - \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4 - \gamma_1'$$

sur la surface Φ existe et est du second ordre. Elle rencontre chacune des droites γ_2, γ_3, γ_4 en deux points et dégénère donc en deux droites β_1, β_1', s'appuyant chacune en un point sur γ_2, γ_3, γ_4 et sur la courbe γ_1'.

La surface Φ contient de même deux droites β_2, β_2' s'appuyant sur γ_3, γ_4, γ_1 et sur γ_2'; deux droites β_3, β_3' s'appuyant sur γ_4, γ_1, γ_2 et sur γ_3'; enfin deux droites β_4, β_4' s'appuyant sur γ_1, γ_2, γ_3 et sur γ_4'.

4. Les surfaces cubiques φ passant par les droites γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 et par conséquent par les droites r et r', forment un système homaloïdal. Si l'on rapporte projectivement les surfaces du système $|\varphi|$ aux plans d'un second espace, aux plans du premier correspondent dans le second des surfaces cubiques φ' passant par quatre droites p_1, p_2, p_3, p_4 deux-à-deux gauches et par les droites s, s' s'appuyant sur les précédentes.

À la surface Φ correspond une surface du douzième ordre formée des quadriques, fondamentales pour la transformation, ayant comme directrices trois des droites p_1, p_2, p_3, p_4, et une surface Φ', du quatrième ordre, qui correspond point par point à la surface Φ.

La surface Φ' passe par les droites p_1, p_2, p_3, p_4, mais non par les droites s, s'.

Aux points infiniment voisins d'un point de la droite p_1, correspondent les points d'une droite s'appuyant sur les droites γ_2, γ_3, γ_4. Par conséquent, aux droites β_1, β_1' correspondent deux points de la droite p_1 que nous désignerons par S_1, S_1'.

Aux points de la cubique gauche γ_1' de Φ, correspondent sur Φ' les points de la droite p_1. N'ayant à considérer que la géométrie sur les surfaces Φ, Φ', il est naturel de désigner p_1 par γ_1'. De même, sur la surface Φ', p_2, p_3 et p_4 seront désignés par γ_2', γ_3', γ_4'.

Désignons par Γ_1 les sections planes de la surface Φ'. Sur la surface Φ, nous avons

$$\Gamma_1 \equiv 3\,\Gamma - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_1' - \alpha_2' - \alpha_3' - \alpha_4' - \\ - \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4 \,. \quad (1)$$

Les courbes $\Gamma_1 - \beta_1$, qui sont découpées sur la surface Φ par les surfaces cubiques φ contenant la droite β_1, sont de genre deux. On en conclut que les sections de la surface Φ'

par les plans passant par le point S_1 ont un point double en S_1. Le point S_1 est donc double pour la surface Φ' et son domaine correspond à la droite β_1. Nous désignerons donc par β_1 la courbe rationnelle, de degré -2, infiniment voisine de S_1 sur la surface Φ'.

On démontre de même que le point S' est double pour la surface Φ' et que la courbe rationnelle infiniment voisine de S' sur cette surface correspond à β_1'; elle sera désignée par ce symbole.

Sur la droite $\gamma_i' \equiv p_i (i=2, 3, 4)$ de la surface Φ', il existe de même deux points doubles S_i, S_i' de la surface, qui correspondent aux droites β_i, β_i' de Φ et dont les domaines seront désignés par ces symboles.

5. Aux points de la droite γ_1 de la surface Φ correspondent les points d'intersection de la surface Φ' et de la quadrique lieu des droites s'appuyant sur les droites γ_2', γ_3', γ_4'.

Les courbes Γ_1, d'après la relation fonctionnelle (1), rencontrent la courbe γ_1 en trois points, donc à la droite γ_1 correspond sur Φ' une cubique gauche que nous désignerons également par γ_1. Cette courbe passe par les points S_2, S_3, S_4, S_2', S_3', S_4', puisque sur Φ la droite γ_1 rencontre les droites β_2, β_3, β_4, β_2', β_3', β_4'. Sur Φ, la droite γ_2 coupe la cubique gauche γ_1' en deux points situés sur r et r', donc sur Φ', la droite γ_1' coupe la cubique gauche γ_1 en deux points, situés sur s et s'.

Aux droites γ_2, γ_3, γ_4 de Φ correspondent de même sur Φ' des cubiques gauches que nous désignerons encore par γ_2, γ_3, γ_4.

Les courbes Γ_1 rencontrent la courbe infiniment petite α_1 en un point; donc à α_1 correspond, sur la surface Φ', une droite que nous désignerons toujours par α_1. Les courbes γ_1, γ_2', γ_3', γ_4' de la surface Φ passant par le point double R_1, la droite α_1 sur la surface Φ' s'appuie sur la cubique gauche γ_1 et sur les droites γ_2', γ_3', γ_4'. À la courbe α_1' de Φ correspond de même une droite α_1' de Φ' s'appuyant sur la cubique gauche γ_1 et sur les droites γ_2', γ_3', γ_4'.

Aux courbes infiniment petites α_2, α_3, α_4, α_2', α_3', α_4' de la surface Φ correspondent de même sur la surface Φ' des droites que nous désignerons par les mêmes symboles et dont les points de rencontre avec les courbes γ_i, γ_i' se déterminent aisément en partant de la relation (1).

Sur la surface Φ', on a

$$\Gamma \equiv 3\,\Gamma_1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - \beta_4 - \beta_1' - \beta_2' - \beta_3' - \beta_4' - \\ - \gamma_1' - \gamma_2' - \gamma_3' - \gamma_4' .$$

On passe de la relation (1) à la relation précédente en utilisant celles qui ont servi à la détermination de β_1, β_1', ... sur la surface Φ :

$$2\,\Gamma \equiv \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_1' + \beta_1 + \beta_1' + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \\ + \alpha_2' + \alpha_3' + \alpha_4'$$

et trois relations analogues.

6. À une courbe Γ', la transformation envisagée fait correspondre des courbes du douzième ordre formée des huit droites α_i, α_i' et d'une courbe du quatrième ordre correspondant point par point à la courbe Γ' et que nous désignerons encore par Γ'. On en conclut que la surface Φ' contient également un faisceau de biquadratiques gauches $|\Gamma'|$. Ce faisceau contient en particulier les courbes $\gamma_i + \gamma_i'$.

Sur la surface Φ, les courbes Γ' rencontrent en un point chacune des droites β_i, β_i', donc sur la surface Φ', les courbes Γ' passent par les points S_i, S_i'. Ces huit points forment donc également un groupe de Lamé.

Le plan ρ_1 coupe Φ suivant une courbe du quatrième ordre possédant des points doubles en R_1', R_2, R_3, R_4 et par conséquent dégénérée en deux coniques δ_{11}, δ_{12}. De même, le plan ρ_1' coupe Φ suivant deux coniques passant par les points R_1, R_2', R_3', R_4'. Il existe une quadrique passant par γ_1, γ_1' et par δ_{11}; elle coupe encore Φ suivant une conique passant par les points R_1, R_2', R_3', R_4'. Cette conique est nécessairement une des coniques δ'_{11}, δ'_{12}; pour fixer les idées, supposons que ce soit δ'_{11}. Il existe alors une quadrique passant par les courbes γ_1, γ_1', δ_{12}, δ'_{12}. En d'autres termes, les courbes $\delta_{11}+\delta'_{11}$, $\delta_{12}+\delta'_{12}$ appartiennent au faisceau $|\Gamma'|$.

À chacune des coniques δ_{11}, δ_{12}, δ'_{11}, δ'_{12} correspond, sur la surface Φ', une conique que nous désignerons par le même symbole.

La conique δ_{11} par exemple, ne peut rencontrer cinq des huit droites β_i, β_i', car sur la surface Φ', la conique correspondante passerait par cinq des points S_i, S_i' et appartiendrait à toutes les quadriques passant par ces huit points. Cela est impossible, car alors les courbes Γ' ne pourraient être des biquadratiques.

Supposons, pour fixer les idées, que sur la surface Φ, la conique δ_{11} soit rencontrée par les droites β_1', β_2, β_3, β_4. Une de ces droites ne peut rencontrer la conique δ'_{11}, car alors elle appartiendrait à la quadrique contenant δ_{11}, δ'_{11}, γ_1 et γ_1'. Les droites β_1', β_2, β_3, β_4 rencontrent donc la conique δ'_{12}. Les droites β_1, β_2', β_3', β_4' rencontrent les coniques δ_{12} et δ'_{11}.

Sur la surface Φ', les coniques δ_{11}, δ'_{12} passent par les points S_1', S_2, S_3, S_4 et sont donc situées dans un plan que nous désignerons par σ_1. Les coniques δ_{12}, δ'_{12} passent par les points S_1, S_2', S_3', S_4' et sont situées dans un plan que nous désignerons par σ_1'.

Le plan ρ_2 coupe Φ suivant deux coniques δ_{21}, δ_{22} passant par les points R_1, R_2', R_3, R_4 et le plan ρ_2' suivant deux coniques δ'_{21}, δ'_{22} passant par les points R_1', R_2, R_3', R_4'. On peut s'arranger de telle sorte que les courbes $\delta_{21}+\delta'_{21}$, $\delta_{22}+\delta'_{22}$ appartiennent au faisceau $|\Gamma'|$. Sur la surface Φ', il correspond à ces coniques des coniques que nous désignerons par les mêmes lettres et telles que δ_{21} et δ'_{22} se trouvant dans un même plan σ_2, δ_{22} et δ'_{21} se trouvant dans un même plan σ_2'. Chacun de ces plans passe par quatre des points doubles S_i, S_i', chacun de ces points appartenant à l'un des plans. Les plans σ_2, σ_2' son évidemment distincts de σ_1, σ_1' et d'autre part, chacun des deux premiers a nécessairement deux points S_i, S_i' en commun avec chacun des seconds. On supposera pour fixer les idées que σ_2 passe par les points S_1, S_2', S_3, S_4 et σ_2' par les points S_1', S_2, S_3', S_4'.

En partant des plans ρ_3, ρ_3', on arrivera à montrer l'existence de deux plans σ_3, σ_3', le premier passant par les points S_1, S_2, S_3', S_4 et le second par les points S_1', S_2', S_3, S_4'. En partant des plans ρ_4, ρ_4', on démontrera l'existence d'un plan σ_4 passant par les points S_1, S_2, S_3, S_4' et d'un plan σ_4' passant par les points S_1', S_2', S_3', S_4.

Les tétraèdres $S_1S_2S_3S_4$ et $S_1'S_2'S_3'S_4'$ sont donc des tétraèdres de Moebius.

7. Nous allons maintenant démontrer que les surfaces Φ, Φ' sont hyperelliptiques.

Considérons, sur l'une de ces surfaces, le système

$$|C| = |2\Gamma + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_1' + \beta_2' + \beta_3' + \beta_4'| .$$

Ce système est de genre 17, de degré 32 et ses courbes ne rencontrent pas les courbes rationnelles α_i, α_i', β_i, β_i'. En rapportant projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire S_{17} à 17 dimensions, il correspond à Φ ou Φ' une surface F possédant seize points doubles coniques homologues des courbes α_i, α_i', β_i, β_i'.

Nous établirons maintenant l'existence, sur la surface Φ, d'un système linéaire $|C'|$ tel que

$$2C \equiv 2C' + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3' + \alpha_4' + \\ + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_1' + \beta_2' + \beta_3' + \beta_4' .$$

La relation précédente donne

$$4\Gamma' + \Sigma\alpha + \Sigma\alpha' + \Sigma\beta + \Sigma\beta' \equiv 2C' .$$

Or, on a sur Φ

$$2\Gamma \equiv 2\Gamma' + \Sigma\alpha + \Sigma\alpha' ,$$

et sur Φ',

$$2\Gamma_1 \equiv 2\Gamma' + \Sigma\beta + \Sigma\beta' .$$

On en déduit

$$2C' \equiv 2(\Gamma + \Gamma_1) .$$

La division sur une surface de genres un étant une opération univoque ([1]), on a

$$C' \equiv \Gamma + \Gamma_1 .$$

Le système $|C'|$ est de genre 13 et de degré 24; ses courbes rencontrent en 32 points les courbes C et en un point chacune des courbes α_i, α_i', β_i, β_i'.

Sur la surface F, les courbes C' sont d'ordre 32 et il existe une hyperquadrique de S_{17} touchant la surface le long de chacune d'elles. Il en résulte ([2]) que la surface F, de genres un ($p_a = P_4 = 1$), représente une involution du second ordre appartenant à une surface de Picard ($p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$). La surface F est donc bien hyperelliptique.

8. Désignons par Ψ la surface de Picard contenant l'involution d'ordre deux dont F, Φ ou Φ' sont des images. Les courbes δ_{ik}, δ'_{ik}, γ_i, γ_i' sont rationnelles et rencontrent chacune en un point huit des seize courbes α_i, α_i', β_i, β_i'; il leur correspond donc, sur Ψ, des courbes de genre trois. Aux courbes Γ^v correspondent sur Ψ des courbes de genre neuf.

Soient A_i, A_i', B_i, B_i' les points de la surface Ψ qui correspondent respectivement aux courbes α_i, α_i', β_i, β_i'.

La courbe γ_1 rencontre les courbes α_1, α_1', β_2, β_2', β_3, β_3', β_4, β_4'; il lui correspond sur Ψ une courbe de genre trois passant par les points A_1, A_1', B_2, B_2', B_3, B_3', B_4, B_4'. Cette courbe de genre trois appartient à un faisceau linéaire, de degré quatre, contenant une seconde courbe appartenant à l'involution I_2 dont F est l'image. Cette seconde courbe

([1]) Voir F. Severi, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique* (*Annales de l'École normale supérieure*, 1908, pp. 449-468).

([2]) F. Enriques et F. Severi, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (*Acta Mathematica*, 1909, t. 33, pp. 321-399). Voir aussi notre mémoire *Sur les surfaces algébriques doubles n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1914, pp. 289-312) et notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

passe par les autres points unis de I_2, c'est-à-dire par A_2, A_2', A_3, A_3', A_4, A_4', B_1, B_1'. Il lui correspond sur F une courbe rationnelle rencontrant en un point chacune des courbes α_2, α_2', α_3, α_3', α_4, α_4', β_1, β_1'. Cette courbe est précisément γ_1'.

La courbe δ_{11} rencontre les courbes α_1', α_2, α_3, α_4, β_1', β_2, β_3, β_4; il lui correspond sur Ψ une courbe de genre trois passant par les points A_1', A_2, A_3, A_4, B_1', B_2, B_3, B_4. Cette courbe appartient à un faisceau linéaire contenant une seconde courbe appartenant à l'involution I_2; cette seconde courbe passe par les points A_1, A_2', A_3', A_4', B_1, B_2', B_3', B_4' et il lui correspond sur F la courbe δ'_{11}.

9. Nous avons vu qu'aux courbes Γ' correspondaient sur Ψ des courbes de genre neuf. Ces courbes appartiennent à un système linéaire de dimension sept qui contient un second système partiel, de dimension cinq, appartenant à l'involution I_2. Les courbes de ce système ne passent par aucun des points unis de l'involution I_2; il leur correspond, sur F, un système linéaire $|C_1|$ de genre et dimension cinq, et de degré huit. On a, sur F,

$$2\,C_1 \equiv 2\,\Gamma' + \Sigma\alpha_i + \Sigma\alpha_i' + \Sigma\beta_i + \Sigma\beta_i' ,$$

d'où

$$2\,C_1 \equiv C\,.$$

On en déduit

$$\Gamma + \Gamma_1 \equiv \Gamma' + C_1\,,$$

et par conséquent les courbes C_1 sont découpées sur la surface Φ par les surfaces du quatrième ordre passant par les droites γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 et par une courbe Γ'.

En rapportant projectivement les courbes C_1 aux hyperplans d'un espace S_5, on obtient dans celui-ci un modèle projectif F' de la surface du huitième ordre F, possédant seize points doubles. Aux courbes δ_{ik}, δ'_{ik}, γ_i, γ_i' correspondent sur F' des courbes du quatrième ordre, rationnelles, le long de chacune desquelles un hyperplan touche la surface. Chacune de ces courbes passe par huit points doubles de F'.

10. Retournons à la surface Φ du début, ayant des points doubles en R_i, R_i', mais ne passant pas par les droites R_iR_i'. Elle contient un faisceau de courbes Γ' passant par les huit points doubles et le long de chacune desquelles il y a une quadrique touchant la surface. Par conséquent, la surface Φ est l'image d'une involution I_2, d'ordre deux, appartenant à une surface F_1, de genres un. On peut prendre comme module projectif de la surface F_1 une surface d'ordre huit, de S_5, sur laquelle l'involution I_2 est engendrée par une homographie biaxiale harmonique dont les axes sont un espace à trois dimensions Σ_3 et une droite Σ_1. Cette droite ne rencontre pas F_1, mais Σ_3 rencontre cette surface en huit points qui correspondent aux points R_i, R_i' et que nous désignerons par les mêmes lettres.

Aux courbes Γ correspondent les sections de F_1 par les hyperplans passant par Σ_1 et aux courbes Γ', les sections de F_1 par les hyperplans passant par Σ_3.

En partant de la surface F_1, on peut obtenir Φ par projection de F_1 sur l'espace Σ_3 à partir de la droite Σ_1. Par conséquent les points de rencontre de F_1 avec Σ_3 sont les sommets de deux tétraèdres $R_1R_2R_3R_4$, $R_1'R_2'R_3'R_4'$ de Moebius.

En un des points R_i, R_i', le plan tangent à la surface F_1 passe par la droite Σ_1. L'hyperplan déterminé par la droite Σ_1 et par le plan ρ_1 coupe donc F_1 suivant une courbe du huitième ordre et de genre cinq ayant quatre points doubles R_1', R_2, R_3, R_4; cette courbe dégénère donc en deux biquadratiques passant par ces quatre points et qui correspondent aux coniques δ_{11}, δ_{12} de Φ. Il existe sept autres sections hyperplanes de F_1 dégénérées en deux biquadratiques; elles sont faites par les hyperplans passant par Σ_1 et par les plans ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_1', ρ_2', ρ_3', ρ_4'.

Supposons maintenant que la surface Φ contienne la droite R_1R_1' ou γ_1. À cette droite correspond sur F_1 une conique passant par les points R_1, R_1' et dont le plan s'appuie sur Σ_1. À la cubique gauche γ_1' correspond une courbe d'ordre six et de genre deux de F_1, passant par les points R_2, R_3, R_4, R_2', R_3', R_4'. Cette courbe appartient à un réseau contenant en outre un faisceau de courbes appartenant à l'involution I_2. Aux courbes de ce faisceau correspondent sur Φ les sections de cette surface par les plans passant par la droite γ_1.

Si la surface Φ contient les droites γ_2, γ_3, γ_4 outre γ_1, la surface F_1 contient quatre coniques et quatre sextiques de genre deux.

À chacune des droites β_i, β_i' correspondent sur F_1 deux droites ne se rencontrant pas. Nous désignerons par β_{i1}, β_{i2} les droites qui correspondent à β_i, par β'_{i1}, β'_{i2} celles qui correspondent à β_i'.

Aux courbes Γ_1 correspondent sur F_1 des courbes D_1 de genre neuf, ne rencontrant pas les droites β_{ik}, β'_{ik}.

Soient D les sections hyperplanes de F_1. Si nous désignons par $\overline{C}_1$ les courbes qui correspondent sur F_1 aux courbes C_1 de Φ, nous aurons, en partant de la relation (sur Φ)

$$\Gamma + \Gamma_1 \equiv \Gamma' + C_1,$$

la relation (sur F_1)

$$D + D_1 \equiv D + \overline{C}_1.$$

Les courbes $\overline{C}_1$ appartiennent donc au système linéaire complet $|D_1|$, de genre neuf, de dimension neuf et de degré seize. Dans ce système, les courbes qui passent par les seize points R_i, R_i', simples pour F_1, sont précisément les transformées des courbes Γ_1.

La relation (sur Φ)

$$2\,C_1 \equiv 2\,\Gamma' + \Sigma\alpha_i + \Sigma\alpha_i' + \Sigma\beta_i + \Sigma\beta_i'$$

donne, sur F_1,

$$2\,D_1 \equiv 2\,D + \Sigma\beta_{ik} + \Sigma\beta'_{ik}.$$

On en conclut que la surface F_1 est hyperelliptique et représente une involution du second ordre appartenant à une surface de Picard Ψ_1.

11. La surface Φ' est de même l'image d'une involution du second ordre appartenant à une surface hyperelliptique F_1'.

Entre les surfaces F_1, F_1', nous avons une correspondance (2, 2). En reprenant un raisonnement que nous avons fait autrefois [1], on voit que les couples de points homologues dans cette correspondance sont représentés par les points de la surface Ψ_1. Celle-ci contient trois involutions du second ordre, deux-à-deux permutables; l'une de ces involutions est représentée par la surface F_1, une autre par la surface F_1', la troisième par la surface Ψ.

12. Nous terminerons par une simple remarque. Reprenons encore une fois la surface Φ passant doublement par les points R_i, R_i', mais non par les droites R_iR_i' [1]. Nous avons vu qu'elle contenait une involution du second ordre, engendrée par l'homographie biaxiale harmonique Ω dans laquelle se correspondent les tétraèdres de Moebius $R_1R_2R_3R_4$ et $R_1'R_2'R_3'R_4'$. Nous avons désigné par r, r' les axes de cette homographie Ω.

Passons à la surface F_1. Celle-ci rencontre l'espace Σ_3 en huit points, simples pour la surface, que nous avons égale-

---

[1] *Sur les surfaces de Picard de diviseur deux* (*Bulletins de l'Acad. roy. de Belgique*, 1927, pp. 394-414); *Sur une propriété des surfaces algébriques irrégulières contenant une involution régulière d'ordre deux* (*Idem*, 1927, pp. 524-543).

[1] Nous avons rencontré une telle surface dans notre note *Sur les involutions cycliques d'ordre quatre appartenant à une surface de genres un* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1923, pp. 360-379). A la page 377, on trouve une surface du quatrième ordre passant doublement par les sommets de deux tétraèdres de Moebius $B_1B_2B_3B_4$, $B_1'B_2'B_3'B_4'$. Nous avons indiqué par inadvertance que les points B étaient doubles biplanaires. Avec les notations de la note en question, le domaine du point B_1 correspond à la section de la surface Φ par le plan $A_2A_3A_4$, section qui est une quartique rationnelle.

ment désigné par R_i, R_i' et qui forment deux tétraèdres de Moebius. D'ailleurs, comme on obtient Φ en projetant F_1 de la droite Σ_1 sur Σ_3, on peut supposer que les points R_i, R_i' sont les mêmes dans les deux cas.

L'homographie Ω_1 de S_5, harmonique, ayant comme axes ponctuels la droite r et l'espace à trois dimensions déterminé par les droites r' et Σ_1, transforme la surface F_1 en elle-même et engendre donc sur celle-ci une involution d'ordre deux, ayant huit points unis et par conséquent de genres un.

De même, l'homographie harmonique Ω_2, ayant pour axes ponctuels la droite r' et l'espace à trois dimensions déterminé par les droites Σ_1 et r, transforme F_1 en elle-même. On a donc sur cette surface une seconde involution du second ordre et de genres un.

À ces deux involutions correspond, sur la surface Φ, l'involution engendrée par l'homographie Ω.

Liége, le 27 août 1941.