GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Note sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques,

par Lucien GODEAUX, membre de l'Académie.

Si (x) est une surface dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques et si nous désignons par $\bar{x}$ le second point caractéristique, les surfaces (x), $(\bar{x})$ ont mêmes quadriques de Lie et mêmes directrices de Wilczynski $r=x\bar{x}$ et $s=\xi\bar{\xi}$, ξ étant le plan tangent en x à la surface (x) et $\bar{\xi}$ le plan tangent en $\bar{x}$ à la surface $(\bar{x})$. Nous avons étudié les propriétés des congruences (r), (s) [1]. Désignons par p,q les foyers de la droite r et par m,n ceux de la droite s. L'équation différentielle des développables des congruences (r), (s) est la même pour les deux congruences. Les points p, q se succèdent dans une suite de Laplace ..., p_1, p, q, q_1 ... et les points m, n dans une suite de Laplace ..., m_1, m, n, n_1 .... Supposons ces deux suites ordonnées

[1] *Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1928, pp. 158-186, 345-348). Voir aussi notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé* (Paris, Hermann, 1934) où l'on trouvera la bibliographie sur l'argument.

dans le même sens; les points m_1, n_1 appartiennent à la droite r et les quaternes $(x\bar{x}pm_1)$, $(x\bar{x}qn_1)$ sont harmoniques. La seconde suite est doublement inscrite dans la première et la congruence (s) est une congruence de Goursat.

Soit maintenant (x) une surface dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques et soient $\bar{x}'$, $\bar{x}''$ les deux derniers de ces points. On peut se proposer de rechercher les propriétés des congruences (r), (s) qui sont conservées dans le cas actuel. Ce problème peut être posé de deux manières : on peut étudier en premier lieu les propriétés des directrices de Wilczynski de la surface (x); c'est ce que nous avons fait dans une note antérieure [2]. Mais on peut également considérer les congruences engendrées par les droites $x\bar{x}'$, $x\bar{x}''$ et par les intersections des plans tangents aux surfaces (x), $(\bar{x}')$, $(\bar{x}'')$ en des points correspondants. C'est ce que nous nous proposons de faire dans cette note.

Nous utiliserons les notations employées dans nos travaux antérieurs et notamment dans notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé*, cité plus haut.

1. Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées normales de Wilczynski du point x satisfont au système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable

$$\left.\begin{aligned} x^{20}+2\,bx^{01}+c_1x=0,\\ x^{02}+2\,ax^{10}+c_2x=0.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Nous supposerons la surface (x) non réglée, c'est-à-dire que les fonctions a, b ne sont pas identiquement nulles.

Posons

$$\alpha=2\,(\log\,a)^{20}+\overline{(\log\,a)^{10}}^{2}+4\,(b^{01}+c_1),$$
$$\beta=2\,(\log\,b)^{02}+\overline{(\log\,b)^{01}}^{2}+4\,(a^{10}+c_2).$$

[2] *Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques* (*Bull. de la Soc. Math. de France*, 1929, pp. 26-41).

En vertu des conditions d'intégrabilité du système (1), on a

$$a\alpha^{10}+2\alpha a^{10}=b\beta^{01}+2\beta b^{01}.$$

Nous avons montré que la condition nécessaire et suffisante pour que les quadriques de Lie de la surface (x) n'aient que trois points caractéristiques est qu'une et une seule des quantités α, β soit nulle. Nous supposerons, pour fixer les idées, $\beta=0$, $\alpha\neq 0$.

Au point x, attachons le tétraèdre de Cartan, dont les sommets sont les points

$$x,\ m=x(\log a)^{10}-2x^{10},\ n=x(\log b)^{01}-2x^{01},$$
$$y=[8ab-(\log a)^{10}(\log b)^{01}]x+2x^{10}(\log b)^{01}+$$
$$+2x^{01}(\log a)^{10}-4x^{11}.$$

Tout point de l'espace peut être représenté par

$$z_1x+z_2m+z_3n+z_4y;$$

z_1, z_2, z_3, z_4 sont les coordonnées locales de ce point.

Les points caractéristiques de la quadrique de Lie Φ,

$$z_1z_4+z_2z_3=0,$$

attachée au point x sont le point x et les points

$$\bar{x}=\xi n+y,$$

où ξ prend les valeurs racines de l'équation

$$\xi^2+\alpha=0.$$

2. Considérons la droite $r=x\bar{x}$ d'équations

$$z_2=0,\ z_3-\xi z_4=0 \qquad (r)$$

et la droite s, intersection du plan tangent $x_4=0$ en x à la surface (x) et du plan tangent en $\bar{x}$ à la surface $(\bar{x})$, c'est-à-dire à la quadrique de Lie. Ses équations sont

$$z_4=0,\ z_1+\xi z_2=0. \qquad (s)$$

Lorsque u, v varient, la droite r engendre une congruence (r) ; l'équation différentielle des développables de cette congruence est

$$(h_1 - k_1 - \xi^{01})\, du\, dv - 2a\xi dv^2 = 0, \tag{2}$$

où l'on a posé

$$h_1 = -(\log\, b)^{11} + 4ab, \quad k_1 = -(\log\, a)^{11} + 4ab.$$

Le foyer de r correspondant à la solution $dv = 0$ de l'équation (2) est donné par

$$\frac{z_1}{2\,h_1} = \frac{z_3}{\xi} = \frac{z_4}{1}\,,\ z_2 = 0\,;$$

c'est donc le point

$$p = 2h_1 x + \xi n + y = 2h_1 x + \bar{x}.$$

Le plan focal correspondant a pour équation

$$z_3 - \xi z_4 = 0; \tag{3}$$

nous le désignerons par ρ_1.

Le second foyer de r, correspondant à la solution

$$(h_1 - k_1 - \xi^{01})\, du - 2a\xi dv = 0$$

de l'équation (2), est donné par

$$\frac{z_1}{2\,(k_1 + \xi^{01})} = \frac{z_3}{\xi} = \frac{z_4}{1}\,,\ z_2 = 0\,;$$

c'est le point

$$q = 2(k_1 + \xi^{01})\, x + \xi n + y = 2(k_1 + \xi^{01})\, x + \bar{x}.$$

Le second plan focal ρ_2 de la droite r a pour équation

$$(h_1 - k_1 - \xi^{01})\, z_2 - 2a\xi\,(z_3 - \xi z_4) = 0. \tag{4}$$

3. L'équation différentielle des développables de la droite s est

$$(h_1 - k_1 - \xi^{01})\, du\, dv + 2a\xi dv^2 = 0. \tag{5}$$

Le foyer de la droite s correspondant à la solution $dv = 0$ est donné par

$$z_1 + \xi z_2 = 0, \ z_3 = 0, \ z_4 = 0;$$

c'est le point

$$p' = \xi x - m,$$

intersection de la droite s avec la tangente xx^{10} à l'asymptotique u de la surface (x) au point x.

Le plan focal correspondant, que nous désignerons par σ_1, a pour équation

$$z_1 + \xi z_2 + 2h_1 z_4 = 0. \tag{6}$$

A la solution

$$(h_1 - k_1 - \xi^{01})\, du + 2a\xi dv = 0$$

de l'équation (5) correspond sur s le foyer

$$\frac{z_1}{2\,a\,\alpha} = \frac{z_2}{2\,a\,\xi} = \frac{z_3}{h_1 - k_1 - \xi^{01}}, \ z_4 = 0\,.$$

C'est le point

$$q' = 2a\alpha x + 2a\xi m + (h_1 - k_1 - \xi^{01})\, n.$$

Le plan focal σ_2 correspondant a pour équation

$$z_1 + \xi z_2 + 2(k_1 + \xi^{01}) z_4 = 0. \tag{7}$$

4. Rappelons que nous avons, dans le cas actuel $(\beta = 0)$, les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&2x^{10} = x(\log\ a)^{10} - m, \quad 2x^{01} = x(\log\ b)^{01} - n,\\
&2m^{10} = \alpha x - m(\log\ a)^{10} - 4bn,\\
&2m^{01} = -2k_1 x + m(\log\ b)^{01} + y,\\
&2n^{10} = -2h_1 x + n(\log\ a)^{10} + y,\\
&2n^{01} = -4am - n(\log\ b)^{01},\\
&2y^{10} = 2h_1 m - \alpha n - y(\log\ a)^{10},\\
&2y^{01} = -4a\alpha x + 2k_1 n - y(\log\ b)^{01}.
\end{aligned}$$

D'autre part, de

$$a\alpha^{10} + 2\alpha a^{10} = 0,$$

on déduit

$$(\log\ a\xi)^{10} = 0, \qquad \xi^{10} = -\xi(\log\ a)^{10}.$$

On a ensuite

$$\beta^{10} = -2h_1(\log\, bh_1)^{01} = 0.$$

Si nous supposons la surface (x) la plus générale possible, sauf la condition $\beta = 0$, on a $h_1 \neq 0$ et

$$(\log\, bh_1)^{01} = 0.$$

C'est dans ce cas que nous nous placerons dans la suite. On a encore

$$\alpha^{01} = -2k_1(\log\, ak_1)^{10}, \qquad \xi\xi^{01} = k_1(\log\, ak_1)^{10}.$$

5. En utilisant les formules précédentes, on trouve

$$2\bar{x}^{10} - [\xi - (\log a)^{10}]\bar{x} + 2h_1(\xi x - m) = 0.$$

Les tangentes aux asymptotiques u *des surfaces* (x), $(\bar{\mathrm{x}})$ *en deux points homologues se rencontrent en un foyer de la droite* s, *intersection des plans tangents à ces surfaces en ces points.*

La tangente à l'asymptotique v à la surface (x) en x coupe s au point n. La tangente à l'asymptotique v au point $\bar{x}$ à la surface $\bar{x}$ coupe s au point

$$2\bar{x}^{01} + \bar{x}(\log\, b)^{01} = 2h_1 n - 2q'.$$

Appelons correspondants d'une part les foyers p, p' et les plans focaux ρ_1, σ_1 de r et s qui correspondent à la solution $dv = 0$ des équations (2) et (5), d'autre part les foyers q, q' et les plans focaux ρ_2, σ_2 qui correspondent aux autres solutions de ces équations.

Le plan σ_1 coupe la droite r en un point m' donné par

$$\frac{z_1}{2\,h_1} = \frac{z_3}{-\xi} = \frac{z_4}{-1}, \; z_2 = 0\,.$$

On a donc

$$m' = 2h_1 x - (\xi n + y) = 2h_1 x - \bar{x}.$$

En comparant à l'expression de p, on voit que

$$(x,\ \bar{x},\ p,\ m') = -1.$$

De même, le plan σ_2 coupe la droite r au point

$$n' = 2(k_1 + \xi^{01})x - \bar{x}$$

et on a

$$(x,\ \bar{x},\ q,\ n') = -1.$$

Le point de rencontre d'un plan focal de la droite s *avec la droite* r *et le foyer correspondant de cette droite, partagent harmoniquement le segment* $\mathrm{x}\bar{\mathrm{x}}$.

On voit également que :

Les plans focaux de la droite r *passent par les foyers correspondants de la droite* s.

Ces deux dernières propriétés sont les mêmes que dans le cas des surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques.

6. Le point q est le transformé de Laplace du point p dans le sens des u. On a en effet

$$(h_1 - k_1 - \xi^{01})\,[2p^{10} - \{\xi - (\log\ a)^{10}\}p] =$$
$$= 2[h_1^{10} - h_1\{\xi - (\log\ a)^{10}\}]\ (p - q).$$

De même,

$$2a\xi[2q^{10} - q\{\xi - (\log\ a)^{10}\}] + (h_1 - k_1 - \xi^{01})\,[2q^{01} + q(\log\ b)^{01}]$$

s'exprime en fonction de $p - q$, de sorte que p est le transformé de Laplace de q dans le second sens.

On a

$$2p'^{10} - [\xi - (\log\ a)^{10}]p' = -4bn$$

et d'autre part

$$2a\xi p' + q' = (h_1 - k_1 - \xi^{01})n.$$

Il en résulte que q' est le transformé de Laplace de p' dans le sens des u. On vérifie sans difficulté que p' est le transformé de Laplace de q' dans l'autre sens.

Les points p, q sont consécutifs dans une suïte de Laplace que nous représenterons par

$$\ldots, p_1, p, q, q_1, \ldots,$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u.

Nous avons

$$2q^{10} - q[\xi - (\log a)^{10}] + 16ab\xi x + 2(h_1 - k_1 - \xi^{01})p' = 0,$$

de sorte que la droite qq_1 ne passe pas par un des foyers de la droite s (comme c'est le cas lorsque les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques).

On a

$$2p^{10} - [\xi - (\log a)^{10}]p = 4h_1[\xi - (\log ah_1)^{10}]x,$$
$$2p^{01} + p(\log b)^{01} = 4a\xi p' - 2(h_1 - k_1 - \xi^{01})n.$$

On en conclut que la droite joignant le point p au point

$$2a\xi p^{10} + (h_1 - k_1 - \xi^{01})p^{01},$$

c'est-à-dire la droite pp_1, ne passe pas par un des foyers de la droite s.

Les points p', q' sont consécutifs dans une suite de Laplace

$$\ldots, p'_1, p', q', q'_1, \ldots$$

De ce qui précède, on conclut que les points p'_1, q'_1 ne peuvent appartenir à la droite r et sont donc distincts des points m', n'.

Le plan ρ_1, c'est-à-dire le plan pqq_1, contient le point p' et le plan ρ_2, ou p_1pq, contient le point q'.

Ajoutons que l'on a

$$2p'^{01} - p'(\log b)^{01} = n'.$$