SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA SUITE DE LAPLACE ASSOCIÉE A UNE SURFACE;

Par Lucien GODEAUX

(Liége).

1. Soit (x) une surface non réglée, de l'espace ordinaire S_3, rapportée à ses asymptotiques u, v. Désignons par Q l'hyperquadrique de l'espace S_5 représentant les droites de l'espace S_3 et soient U, V les points de Q qui représentent les tangentes aux lignes u, v en un point x de la surface (x). MM. Tzitzeica (1) et Bompiani (2) ont montré que les points U, V sont transformés de Laplace l'un de l'autre; nous avons ensuite établi que la suite de Laplace à laquelle appartiennent les points U, V est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q (3). Désignons par

$$(\mathrm{L}) \qquad \ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots$$

cette suite de Laplace, chaque point étant le transformé du précédent le sens des u. La droite UV appartient a l'hyperquadrique Q; les points U_1, V_1 ne peuvent appartenir à cette hyperquadrique; le point U_n a pour hyperplan polaire par rapport à Q l'hyperplan

$$V_{n-2} V_{n-1} V_n V_{n+1} V_{n+2}$$

(1) *Sur un théorème de M. Darboux* (*C. R. Acad. Sc.*, 2e semestre 1910, p. 971-974), *Géométrie différentielle projective des réseaux* (Paris, Gauthier-Villars, 1924).

(2) *Sull' equazione di Laplace* (*Rend. Circ. matem. Palermo*, t. 34, 1912, p. 383-407).

(3) *Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé* (*Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique*, 1927, p. 812-826; 1928, p. 36-41). *La théorie des surfaces et l'espace réglé* (*Actualités scientifiques et industrielles*, fasc. n° 138, Paris, Hermann, 1934). On trouvera, dans ce dernier opuscule, le résumé de nos recherches sur la géométrie projective différentielle des surfaces faites en utilisant l'espace réglé, ainsi que les indications bibliographiques concernant les travaux que nous avons utilisés et notamment ceux de M. Demoulin.

et le point V_n, l'hyperplan

$$U_{n-2} U_{n-1} U_n U_{n+1} U_{n+2}.$$

Les plans $U_n U_{n+1} U_{n+2}$, $V_n V_{n+1} V_{n+2}$ sont conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q et coupent celle-ci suivant deux coniques dont les points représentent les génératrices de deux demi-quadriques ayant même rapport Φ_n. Deux quadriques consécutives de la suite Φ, Φ_1, ..., Φ_n, ... se touchent en quatre points, caractéristiques pour chacune de ces quadriques lorsque u, v varient. La première quadrique de la suite, Φ, correspondant aux plans $U U_1 U_2$, $V V_1 V_2$, est la quadrique de Lie attachée au point x à la surface (x).

Les points de rencontre des droites $U_1 U_2$, $V_1 V_2$ ont pour images dans S_3 les quatre côtés du quadrilatère de Demoulin, dont les sommets sont les points de contact des quadriques Φ, Φ_1. Le lieu de ces points et la surface (x) constituent l'enveloppe des quadriques de Lie de cette dernière surface; cette enveloppe comporte donc en général cinq nappes. Lorsque l'un des points U_2 ou V_2 appartient à Q, l'enveloppe des quadriques de Lie de la surface (x) ne comporte plus que trois nappes; nous avons étudié les circonstances qui se présentent dans ce cas, il y a quelques années [1]. Nous nous proposons, dans cette Note, d'étudier le cas où le point U_n appartient à l'hyperquadrique Q.

2. Nous ferons les hypothèses suivantes :

1° La suite de Laplace L est illimitée dans les deux sens.

2° Les points U_2, U_3, ..., U_{n-1} n'appartiennent pas à l'hyperquadrique Q.

3° Le point U_n appartient au plan $V_{n-1} V_n V_{n+1}$.

Il résulte d'ailleurs de cette dernière condition que le point U_n appartient à son hyperplan polaire par rapport à Q et par conséquent à cette hyperquadrique.

L'hyperplan polaire $V_{n-2} V_{n-1} V_n V_{n+1} V_{n+2}$ de U_n par rapport à Q coupe cette hyperquadrique suivant un cône de sommet U_n;

---

[1] *Sur les surfaces dont les quadratiques de Lie n'ont que trois points caractéristiques* (*Bull. de la Soc. math. de France*, 1929, p. 26-41).

le plan $V_{n-1}V_nV_{n+1}$ contenant U_n coupe ce cône et par suite Q suivant deux droites a_1, a_2 passant par U_n. Désignons par A_1, A_2 les points de rencontre de ces droites avec $V_{n-1}V_n$, par A'_1, A'_2 les points de rencontre de a_1, a_2 avec V_nV_{n+1}.

Les droites U_nU_{n-1}, U_nU_{n+1} touchent la surface (U_n) et par suite Q en U_n; le plan $U_{n-1}U_nU_{n+1}$ touche donc l'hyperquadrique Q et la rencontre suivant deux droites a'_1, a'_2 passant par U_n.

Désignons par r la droite de S_3 représentée par le point U_n. Lorsque u, v varient, la droite r engendre une congruence (r) qui, d'après un théorème classique de Darboux, est une congruence W, le point U_n satisfaisant à une équation de Laplace. Soient F_1, F_2 les foyers de la droite r, φ_1 et φ_2 les plans focaux. Les droites a'_1, a'_2 représentent respectivement les faisceaux de rayons (F_1, φ_1), (F_2, φ_2) et les plans tangents aux surfaces focales (F_1), (F_2) sont respectivement φ_2, φ_1.

La quadrique Φ_{n-1} est formée des plans φ_1, φ_2 et les droites a_1, a_2 de Q représentent donc des faisceaux de rayons appartenant à ces plans et contenant la droite r. Supposons, pour fixer les idées, que le faisceau de rayons représenté par la droite a_1 appartienne au plan φ_1. Au plan réglé φ_1 correspond sur Q un plan φ'_1 contenant les droites a_1, a'_1. De même, au plan réglé φ_2 correspond sur Q le plan φ'_2 déterminé par les droites a_2, a'_2.

L'espace à trois dimensions déterminé par les droites a_1, a'_1, a'_2 coupe Q suivant le plan φ'_1 et suivant un second plan passant par a'_2. Ce second plan représente une gerbe de rayons comprenant le faisceau de droites (F_2, φ_2); cette gerbe a donc pour sommet le point F_2. Désignons par φ''_2 le plan de Q qui représente cette gerbe. De même, si φ''_1 est le plan de Q image de la gerbe de sommet F_1, les plans φ'_2 et φ''_1 forment l'intersection de Q et de l'espace à trois dimensions déterminé par les droites a_2, a'_1, a'_2.

Considérons la quadrique Φ_{n-2}, représentée par les plans $U_{n-2}U_{n-1}U_n$, $V_{n-2}V_{n-1}V_n$. D'après ce que nous avons établi antérieurement [1], parmi les points caractéristiques de Φ_{n-1} se trouvent les sommets du quadrilatère gauche dont les côtés sont représentés par les intersections Q avec les droites $U_{n-1}U_n$,

---

[1] *La théorie des surfaces* ... (*loc. cit.*), p. 12 et suivantes.

$V_{n-1} V_n$. Dans le cas actuel, ce quadrilatère gauche est formé de la droite r comptée deux fois et des droites r_1, r_2 représentées par les points A_1, A_2. Les points caractéristiques envisagés se réduisent actuellement à deux, les points rr_1, rr_2; d'autre part, ces points sont nécessairement les foyers de la droite r. Il en résulte que les plans φ''_2, φ''_1 passent respectivement par a_1, a_2 et que ces droites représentent les faisceaux de rayons (F_2, φ_1), (F_1, φ_2).

3. Comme nous l'avons remarqué, la droite r engendre une congruence W dont les surfaces focales sont (F_1), (F_2). Le point U_n, image de r sur Q, satisfait à une équation de Laplace dans laquelle les variables indépendantes sont u, v; par conséquent les asymptotiques des surfaces (F_1), (F_2) sont les courbes u, v.

Désignons par $U^{(1)}$, $V^{(1)}$ les points qui représentent sur Q les tangentes en asymptotiques u, v de la surface (F_1) en un point F_1. Le plan tangent à cette surface étant φ_2 et le faisceau des tangentes étant représenté sur Q par la droite a_2, les points $U^{(1)}$, $V^{(1)}$ appartiennent à a_2. De même, les points $U^{(2)}$, $V^{(2)}$ de Q représentant les tangentes aux asymptotiques u, v de le surface (F_2) appartiennent à a_1.

Appliquons maintenant les propriétés des congruences W que nous avons établies antérieurement [1]. Le complexe linéaire osculateur à la congruence (r) a pour image l'hyperplan

$$U_{n-2} U_{n-1} U_n U_{n+1} U_{u+2}.$$

Le pôle de cet hyperplan par rapport à Q, soit V_n, est l'intersection des droites $U^{(1)}U^{(2)}$, $V^{(1)}V^{(2)}$.

La droite $U^{(1)}U^{(2)}$ contient le pôle par rapport à Q de l'hyperplan $U_{n-3} \ldots U_{n+1}$, c'est-à-dire le point V_{n-1}. Il en résulte que $U^{(1)}$ coïncide avec A_2 et $U^{(2)}$ avec A_1.

On démontre de même que les points $V^{(1)}$, $V^{(2)}$ coïncident respectivement avec les points A'_2, A'_1.

Lorsque le point U_n *appartient au plan* $V_{n-1} V_n V_{n+1}$ *et par suite à l'hyperquadrique* Q, *les tangentes aux asymptotiques*

---

[1] *La théorie des surfaces* ... (*loc. cit.*), p. 21 et suivantes.

u, v des nappes focales de la congruence W engendrée par la droite ayant pour image U_n, sont représentées par les intersections de Q et des droites $V_{n-1}V_n$, V_nV_{n+1}.

4. Les points A_1, A'_1 sont consécutifs dans une suite de Laplace inscrite dans la suite L; A'_1 est le transformé de A_2 dans le sens des u. Soit A''_1 le transformé de Laplace de A'_1 dans le sens des u; A''_2 celui de A'_2 dans le même sens. Les points A''_1, A''_2 appartiennent à la droite $V_{n+1}V_{n+2}$. D'autre part, les droites $A_1A'_1$, $A_2A'_2$ passent par U_n, les droites $A'_1A''_1$, $A'_2A''_2$ passent par U_{n-1}. Il en résulte que le point U_{n-1} appartient au plan $V_nV_{n+1}V_{n+2}$.

On démontre de même que le point U_{n+1} appartient au plan $V_nV_{n-1}V_{n+2}$.

De proche en proche, le même raisonnement montre que la suite de Laplace L est inscrite dans elle-même, chaque point de cette suite appartenant au plan déterminé par trois autres. D'une manière précise, le point U_{n-i} appartient au plan $V_{n+i-1}V_{n+i}V_{n+i+1}$, le point U_{n+i} au plan $V_{n-i-1}V_{n-i}V_{n-i+1}$. En particulier, le point U appartient au plan $V_{2n-1}V_{2n}V_{2n+1}$, le point U_{2n} au plan UVV_1.

D'une manière générale,

Lorsque le point U_n appartient en plan $V_{n-1}V_nV_{n+1}$, tout point de la suite de Laplace L appartient au plan déterminé par ses $2n^{ième}$, $(2n+1)^{ième}$ et $(2n+2)^{ième}$ transformés de Laplace dans le sens des u.

La réciproque est évidente.

5. Dans la suite de quadriques Φ, Φ_1, ... attachée à la surface (x) au point x, la quadrique Φ_{n-1} est dégénérée en deux plans; les quadriques Φ_{n-2}, Φ_n ne sont pas dégénérées et ont toutes deux pour points caractéristiques les foyers F_1, F_2 de la droite r. Les suites de quadriques analogues attachées aux surfaces (F_1), (F_2) possèdent la même propriété.

Représentons encore comme plus haut par $U^{(1)}$, $V^{(1)}$ les images sur Q des tangentes aux lignes asymptotiques u, v de la surface (F_1), c'est-à-dire les points A_2, A'_2. Soit

$$(L_1) \qquad U_n^{(1)}, \ldots, U_1^{(1)}, U^{(1)}, V^{(1)}, V_1^{(1)}, \ldots, V_n^{(1)}, \ldots$$

la suite de Laplace à laquelle ces points appartiennent, chaque point étant transformé du précédent dans le sens des u. Le point $U^{(1)}$ appartient à la droite $V_{n-1}V_n$, le point $U_1^{(1)}$ à la droite $V_{n-2}V_{n-1}, \ldots,$ le point $U_i^{(1)}$ à la droite $V_{n-i-1}V_{n-i}, \ldots,$ le point $U_n^{(1)}$ à la droite UV. D'autre part, la droite $V^{(1)}V_1^{(1)}$ passe par $U_{n-1}, \ldots,$ la droite $V_{i-1}^{(1)}V_i^{(1)}$ par $U_{n-i}, \ldots,$ la droite $V_{n-1}^{(1)}V_n^{(1)}$ par U, la droite $V_n^{(1)}V_{n+1}^{(1)}$ par V. Il en résulte que si l'on désigne par Φ', Φ'_1, ... la suite de quadriques associé à la surface (J_1) au point point J_1, la quadrique Φ'_{n-1} est dégénérée en deux plans. Le point $U_n^{(1)}$ appartient au plan $V_{n-1}^{(1)}V_n^{(1)}V_{n+1}^{(1)}$; il représente une droite engendrant une congruence W dont une des nappes focales est la surface (x) et l'autre une surface (x') possédant des propriétés analogues à celles de (x). Et ainsi de suite. Si l'on désigne par

$$\ldots, U'_n, \ldots, U'_1, U', V', V'_1, \ldots, V'_n, \ldots$$

la suite de Laplace de S_5 associée à la surface (x'), le point U'_n appartient à Q et la droite $V'_{n-1}V'_n$ passe par $U^{(1)}$, la droite $V'_nV'_{n+1}$ par $V^{(1)}$. Le point U'_n représente une droite r' engendrant une congruence W dont une surface focale est (J_1), l'autre étant une nouvelle surface (J'_1).

En partant du point $U^{(2)}$ ou A_1, on arrive de même à une congruence W ayant comme surfaces focales (x) et une seconde surface (x'').

On voit que l'on obtient deux suites de surfaces ..., (x'), (x), (x''), ... et ..., (J'_1), (J_1), (J_2), ... telles que deux surfaces consécutives d'une suite sont les nappes focales d'une congruence W. L'étude de ces suites semble d'ailleurs devoir être assez difficile.

(Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques* 2ᵉ série, t. LX, juin 1936.)

104926 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.