Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Nos 8-9, 1936.

Remarque sur les surfaces de genres zéro et de bigenre un,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Une surface algébrique de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$) peut toujours se ramener, par une transformation birationnelle, soit à une surface du sixième ordre passant par doublement par les arêtes d'un tétraèdre (1), soit à la surface qui représente, sur l'hyperquadrique de Klein, la congruence des rayons principaux de Reye (2), soit encore à un plan double dont la courbe de diramation est formée d'une sextique ayant deux tacnodes et un point double à l'intersection des deux tangentes tacnodales, et de ces tangentes. Récemment M. Burniat a trouvé de nouveaux modèles projectifs des surfaces en question (3). Le second modèle projectif signalé plus haut peut s'obtenir simplement comme image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une certaine surface du quatrième ordre, de genres $p_a = P_4 = 1$, passant par une sextique gauche de genre trois (4). Dans cette courte note, nous montrons que la

(1) F. ENRIQUES, Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche (*Mem. Soc. Ital. delle Science*, 1896, 3e s., t. X, pp. 1-81); Sopra le superficie algebriche di bigenere uno (*idem*, 1906, 3e s., t. XIV, pp. 327-352).

(2) G. FANO, Nuove ricerche sulle congruenze di rette del 3o ordine prive di linea singolare (*Mem. Accad. Torino*, 1901, pp. 1-79); Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno, e loro casi particolari (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1o sem., 1910, pp. 98-118).

(3) BURNIAT, Recherches sur les surfaces de bigenre un; Thèse d'agrégation de l'Enseignement supérieur. (*Mém. de la Soc. roy. des Sc. de Liége*, 1936, pp. 1-104.)

(4) Recherches sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, Cl. des Sc., 1926, pp. 726-741, 892-904; 1927, pp. 114-133). Voir aussi notre exposé sur Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls (*Actualités scientifiques*. Paris, Hermann, 1934, pp. 1-33), où l'on trouvera la bibliographie de la question.

même involution peut être représentée par une surface d'ordre dix, appartenant à un espace linéaire à cinq dimensions, non située sur une hyperquadrique, surface déjà rencontrée par M. Fano [1]. Il en résulte qu'*une surface de genres zéro et de bigenre un est birationnellement équivalente à la surface de l'espace à cinq dimensions dont les équations s'obtiennent en exprimant qu'un déterminant symétrique à seize éléments est de caractéristique deux, les éléments de ce déterminant étant des formes linéaires par rapport aux coordonnées.*

1. Considérons, dans un espace ordinaire, trois polarités indépendantes

$$\Sigma a_{ik}x_ix'_k = 0, \quad \Sigma b_{ik}x_ix'_k = 0, \quad \Sigma c_{ik}x_ix'_k = 0, \tag{1}$$
$$(a_{ik} = a_{ki}, \quad b_{ik} = b_{ki}, \quad c_{ik} = c_{ki}; \quad i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Les points x, x' se correspondent dans une transformation birationnelle involutive T ayant comme courbe fondamentale une sextique gauche Δ de genre trois. Une surface du quatrième ordre F, passant par Δ, a une équation qui peut s'écrire sous la forme

$$\Sigma \lambda_{ik}\, x_ix'_k = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4). \tag{2}$$

les x' ayant les valeurs données par les équations (1). Les surfaces F forment un système linéaire $|F|$, de dimension douze, transformé en lui-même par T. Les surfaces F sont en général dépourvues de points multiples et par suite sont de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

Le système linéaire $|F|$ contient deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_2 engendrée par T. L'un de ces systèmes, $|F_0|$, est formé des surfaces dont l'équation s'obtient en faisant $\lambda_{ik} = \lambda_{ki}$ dans l'équation (2); il a la dimension six et ses surfaces ne passent pas par les huit points unis de l'involution I_2. Sur une surface F_0, les groupes

(1) Fano, Superficie... (*loc. cit.*).

de l'involution I_2 lui appartenant forment une involution de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$). Le second système, $|F_1|$, est formé des surfaces dont l'équation s'obtient en faisant $\lambda_{ik} + \lambda_{ki} = 0$ dans l'équation (2); il a la dimension cinq. Les surfaces F_1 passent par les huit points unis de l'involution I_2. Les ∞^2 groupes de cette involution appartenant à une surface F_1 forment sur celle-ci une involution de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

2. Posons

$$\rho X_{ik} = x_i x'_k \, ; \tag{3}$$

interprétons les seize quantités X_{ik} comme coordonnées projectives homogènes d'un espace S_{15}. Les points X de cet espace donnés par les équations (3) forment la variété de Segre V_6^{20}, d'ordre vingt, représentant les couples *ordonnés* de points de l'espace primitif. Les équations de cette variété s'obtiennent en écrivant que le déterminant

$$| X_{ik} |, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

est de caractéristique un.

La transformation T détermine une homographie T′ de S_{15}, d'équations

$$\rho X'_{ik} = X_{ki},$$

transformant en elle-même la variété de Segre V_6^{20}. L'homographie T′ est harmonique et possède deux axes ponctuels : un espace σ_0, d'équations

$$X_{ik} = X_{ki},$$

à neuf dimensions et un espace σ_1, d'équations

$$X_{ik} + X_{ki} = 0,$$

à cinq dimensions.

Aux trois polarités (1) correspondent dans S_{15} trois hyperplans passant par σ_1 et ayant en commun un espace linéaire S_{12}, uni pour l'homographie T′. Cet espace S_{12} coupe la variété V_6^{20} suivant une variété V_3^{20} et l'espace σ_0 suivant un espace linéaire σ'_0, à six dimensions. L'homographie T' détermine dans S_{12} une homographie harmonique T'' ayant pour axes σ'_0, σ_1, déterminant sur V_3^{20} une involution I'_2 dont les couples correspondent birationnellement à ceux de I_2. Aux surfaces F correspondent les sections hyperplanes de V_3^{20}, qui sont donc des surfaces de genres un; aux surfaces F_0 correspondent les sections de V_3^{20} par les hyperplans passant par σ_1; aux surfaces F_1 correspondent les sections de V_3^{20} par les hyperplans passant par σ'_0.

3. Reprenons la variété de Segre V_6^{20}. Pour obtenir une image de l'involution du second ordre engendrée sur cette variété par T', projetons V_6^{20} à partir de l'espace σ_1 sur l'espace σ_0 ou, ce qui revient au même à une homographie près, posons

$$Y_{ik} = Y_{ki} = \rho\,(X_{ik} + X_{ki}) = \rho'(x_i x'_k + x_k x'_i),$$

en interprétant les Y comme coordonnées projectives de σ_0. La projection est la variété Ω_6^{10} dont les équations s'obtiennent en écrivant que le déterminant

$$|\, Y_{ik} \,| \tag{4}$$

est de caractéristique deux.

La variété Ω_6^{10} n'est autre que la variété qui représente les couples de plans de l'espace ordinaire (¹).

L'espace σ_0 coupe V_6^{20} suivant une variété à trois dimensions unie pour l'involution engendrée par T'; cette variété, U_3^8, est quadruple pour la variété Ω_6^{10}. Les équations de la variété U_3^8 s'obtiennent en écrivant que le déterminant (4) a la caractéristique un.

L'involution I'_2, engendrée sur V_3^{20} par T'', a pour image la section de Ω_6^{10} par les trois hyperplans ayant pour équations

$$\Sigma a_{ik}\, Y_{ik} = 0, \qquad \Sigma b_{ik}\, Y_{ik} = 0, \qquad \Sigma c_{ik}\, Y_{ik} = 0; \tag{5}$$

c'est donc une variété Ω_3^{10} appartenant à un espace linéaire S_6.

(¹) Cf. par exemple notre note « La géométrie de la cubique gauche ». (*Mém. de la Soc. roy. des Sc. de Liége*, 1927, pp. 1-44.)

4. Considérons une surface F_0 d'équation

$$\Sigma d_{ik} x_i x'_k = 0, \qquad (d_{ik} = d_{ki}; \quad i, k = 1, 2, 3, 4)\cdot$$

Il lui correspond la section de la variété V_3^{20} par l'hyperplan

$$\Sigma d_{ik} X_{ik} = 0.$$

Sur cette surface F_0, T engendre une involution privée de points unis dont l'image est, d'après ce qui précède, la section de la variété Ω_3^{10} par l'hyperplan

$$\Sigma d_{ik} Y_{ik} = 0.$$

Cette section est une surface normale de genres zéro et de bigenre un, appartenant à un espace linéaire à cinq dimensions. En d'autres termes, les sections par des espaces S_5 de la variété Ω_6^{10} des couples de plans de l'espace sont des surfaces de genres zéro et de bigenre un, résultat déjà obtenu par M. Fano. L'espace S_5 coupe U_3^8 suivant huit points quadruples pour la surface. Celle-ci n'appartient, d'autre part, à aucune hyperquadrique.

Le résultat précédent peut se traduire de la manière suivante : Considérons une surface F_0 et désignons par $|C|$ le système linéaire découpé sur cette surface par les surfaces F. Le système $|C|$ contient deux systèmes linéaires composés au moyen de l'involution d'ordre deux engendrée par T sur F_0 : ce sont le système $|C_0|$, découpé par les autres surfaces F_0, et le système $|C_1|$, découpé par les surfaces F_1. Tous deux ont la dimension cinq et sont dépourvus de points-base; leur degré est égal à vingt et leur genre à onze.

En rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace S_5, on obtient une surface Φ_0, image de l'involution en question, d'ordre dix, à sections de genre six, ayant les genres zéro et le bigenre un, possédant huit points quadruples et n'appartenant pas à une hyperquadrique. C'est la surface qui vient d'être étudiée.

On sait, d'autre part, qu'en rapportant projectivement les courbes C_1 aux hyperplans d'un espace S_5, on obtient une surface Φ_1 représentant sur l'hyperquadrique de Klein la congruence de Reye.

Les surfaces Φ_0, Φ_1 sont birationnellement identiques, mais présentent des caractères projectifs très différents.

5. Aux courbes C_1 correspondent sur la surface Φ_0 des courbes canoniques de genre six qui, d'après la théorie des involutions, sont les courbes de contact de la surface Φ_0 et d'hyperquadriques.

D'une manière précise, à la courbe C_1 découpée sur F_0 par la surface

$$\Sigma\lambda_{ik}(x_i x'_k - x_k x'_i) = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

correspond la courbe le long de laquelle l'hyperquadrique

$$\Sigma\lambda_{ik}\lambda_{jh}(Y_{ih}Y_{jk} - Y_{ij}Y_{hk}) = 0, \qquad (i, k, j, h = 1, 2, 3, 4)$$

touche la surface Φ_0.

En changeant de notation, on peut dire que les équations obtenues en exprimant que le déterminant [1]

$$|\varphi_{ik}(x_0, x_1, \ldots, x_5)|$$

est de caractéristique deux, jointes à l'équation

$$\Sigma\lambda_{ik}\lambda_{jh}(\varphi_{ih}\varphi_{jk} - \varphi_{ij}\varphi_{kh}) = 0,$$

où les φ sont des formes linéaires telles que $\varphi_{ik} \equiv \varphi_{ki}$, représentent une courbe canonique de genre six.

Liége, le 27 juillet 1936.

---

[1] Ces équations représentent évidemment la surface Φ_0 (sous la condition $\varphi_{ik} = \varphi_{ki}$).

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique