Bulletin de la Classe des sciences

Sur les involutions cycliques régulières appartenant à une surface irrégulière

Lucien Godeaux

Résumé

Premières recherches sur les involutions cycliques régulières appartenant à une surface irrégulière. Relation avec la variété de Picard associée à cette dernière surface.

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1973.60658

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les involutions cycliques régulières appartenant à une surface irrégulière

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Premières recherches sur les involutions cycliques régulières appartenant à une surface irrégulière. Relation avec la variété de Picard associée à cette dernière surface.

Il est bien connu qu'une involution régulière peut appartenir à une surface irrégulière. La surface de Kummer, qui est régulière ($p_a = p_g = 1$) représente une involution d'ordre deux appartenant à une surface de Jacobi ($p_a = -1$, $p_g = 1$) d'irrégularité deux. Dans des travaux antérieurs, nous avons étudié les involutions du second ordre, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, régulières, appartenant à une surface irrégulière (1). Nous avons aussi montré l'existence d'une surface régulière représentant une involution appartenant à une surface d'irrégularité trois (2). Enfin nous avons montré l'existence d'une involution cyclique rationnelle appartenant à la surface représentant les couples de points (non ordonnés) d'une courbe contenant une involution cyclique rationnelle (3).

---

(1) *Sur les involutions régulières d'ordre deux appartenant à une surface irrégulière* (Comptes rendus du Congrès international de Toronto, 1924, t. I, pp. 733-737). Même titre (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1924, pp. 434-446; 1925, pp. 37-47, 157-166).

(2) *Sur une involution rationnelle douée de trois points de coïncidence appartenant à une surface de genre trois* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1921, pp. 653-665, 694-702).

(3) *Involuzioni cicliche razionali appartenenti a superficie irregolari* (Atti e Memorie della Accademia di Modena, 1956, pp. 17-26).

Dans cette note, nous allons considérer le cas d'une involution cyclique régulière, d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface irrégulière.

1. Soit F une surface algébrique d'irrégularité $q > 0$ contenant une involution cyclique régulière I, ne possédant qu'un nombre fini de points unis, d'ordre premier $p > 2$. Soit T la transformation birationnelle de F en soi génératrice de l'involution.

Comme nous l'avons fait ailleurs [1], nous pouvons construire sur F un système linéaire régulier $|C_1|$, transformé en soi par T et contenant p systèmes linéaires partiels $|C_{11}|$, $|C_{12}|$, ..., $|C_{1p}|$ appartenant à l'involution, le premier étant dépourvu de points-base, les autres passant par les points unis de l'involution.

Désignons par r la dimension du système $|C_1|$ et par r_0 celle du système $|C_{11}|$.

Rapportons projectivement les courbes C_{11} aux hyperplans d'un espace linéaire à r_0 dimensions. Il correspond à F une surface Φ image de l'involution I.

Nous désignerons par $|\Gamma_{11}|$, $|\Gamma_{12}|$, ..., $|\Gamma_{1_p}|$ les systèmes linéaires (complets) qui correspondent sur Φ aux systèmes $|C_{11}|$, $|C_{12}|$, ..., $|C_{1_p}|$, par π et n le genre et le degré du système $|\Gamma_{11}|$.

Dans ces conditions, les courbes C_{11} et par suite les courbes C_1 ont le genre $p(\pi - 1) + 1$ et le système $|C_1|$ a le degré pn.

2. Sur la surface F, le système $|C_1|$ appartient totalement à un système continu complet $\{C\}$ formé de ∞^q systèmes linéaires $|C|$ de même genre et de même degré que $|C_1|$. La transformation T fait correspondre à $\{C\}$ un système continu $\{C'\}$ qui a en commun avec $\{C\}$ le système $|C_1|$. Par conséquent le système $\{C'\}$ coïncide avec le système $\{C\}$.

Les points de la variété de Picard V attachée à la surface F représentent les systèmes linéaires $|C|$ de $\{C\}$. Ce système étant transformé en soi par T, il correspond à cette transformation une transformation θ de V en soi, qui a évidemment la période p.

A une courbe C de $\{C\}$ correspond sur la surface Φ une courbe Γ et à cette courbe Γ correspondent sur F la courbe C et ses $p - 1$

[1] *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Edit. Cremonese, 1963).

transformées par T et ses différentes puissances. Il en résulte que la courbe Γ possède $p(p-1)n:2$ points doubles variables. La surface Φ étant par hypothèse régulière, les courbes Γ appartiennent à un système linéaire $|\Gamma|$ de genre

$$p(\pi-1)+1+\frac{1}{2}p(p-1)n.$$

3. Supposons qu'il existe dans le système $\{C\}$ un système linéaire $|C_2|$ distinct de $|C_1|$ transformé en soi par T. Ce système peut appartenir à l'involution I ou non. Dans tous les cas, il contient un système linéaire $|C_{21}|$ appartenant à I et auquel correspond sur Φ un système linéaire complet $|\Gamma_{21}|$.

Faisons varier sur F d'une manière continue la courbe C de manière à la faire tendre vers une courbe C_{11}. La courbe Γ a pour limite une courbe Γ_{11} comptée p fois et on a

$$|p\Gamma_{11}| = |\Gamma|.$$

Faisons d'autre part varier d'une façon continue C de manière à la faire tendre vers une courbe C_{21}. La courbe Γ tend vers une courbe Γ_{21} comptée p fois et on a

$$|p\Gamma_{21}| = |\Gamma|.$$

On en conclut

$$|p\Gamma_{11}| = |p\Gamma_{21}|.$$

Mais alors, le système $|\Gamma_{21}|$ a le même genre, le même degré que le système $|\Gamma_{11}|$. On en conclut que le système $|C_{21}|$ est analogue au système $|C_{11}|$ et n'a pas pour points-base les points unis de l'involution I. Il a la même dimension r_0 sur le système $|C_{11}|$.

Le système $|C_2|$ n'appartient pas à l'involution I et contient au moins un second système $|C_{22}|$ appartenant à l'involution I et auquel correspond sur Φ un système $|\Gamma_{22}|$. En reprenant le raisonnement fait plus haut, on voit qu'il existe un système par exemple $|\Gamma_{12}|$ tel que l'on ait

$$|p\Gamma_{22}| = |p\Gamma_{12}|.$$

Mais on sait que l'on a

$$p\Gamma_{11} \equiv p\Gamma_{12} + \Delta,$$

où Δ est une certaine somme de courbes rationnelles équivalentes aux points de diramation de la surface Φ. Poui la même raison, on a

$$p\Gamma_{21} \equiv p\Gamma_{22} + \Delta' .$$

On en conclut $\Delta \equiv \Delta'$. On peut poursuivre ce raisonnement pour les différents systèmes de courbes C_1 et C_2 appartenant à l'involution I. On en conclut que les systèmes $| C_1 |$ et $| C_2 |$ ont le même comportement vis-à-vis de l'involution I.

4. Supposons que le système $\{C\}$ possède une infinité de systèmes linéaires appartenant à l'involution I. Si $| C_i |$ est un de ces systèmes, il contient un système $| C_{i1} |$ appartenant à l'involution et auquel correspond sur la surface Φ un système tel que

$$| p\Gamma_{i1} | = | \Gamma |.$$

Deux systèmes $| p\Gamma_{i1} |$ et $| p\Gamma_{j1} |$ ne peuvent avoir une courbe commune et on a donc dans $| \Gamma |$ une infinité de systèmes linéaires qui ne peuvent avoir une courbe commune. Cela implique que la dimension de $| \Gamma |$ doit être infinie, ce qui est absurde. Dans le système $\{C\}$, il ne peut exister qu'un nombre fini de systèmes transformés en eux-mêmes par T.

La transformation θ de la variété de Picard en elle-même ne peut donc posséder qu'un nombre fini de points unis.

Rappelons que la variété de Picard V est une variété abélienne à q dimensions qui admet une représentation paramétrique au moyen de fonctions abéliennes à q variables appartenant à une même table de périodes, la représentation étant telle qu'à un point de la variété corresponde un seul groupe de valeurs des paramètres. G. Scorza (1) a démontré qu'à la transformation birationnelle θ de V en soi, correspond une substitution linéaire de module $+ 1$ transformant en elle-même la table des périodes des fonctions abéliennes.

Liège, le 17 janvier 1973.

---

(1) *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1916, t. XLI, pp. 263-380), *Opere Scelte* (Edizioni Cremonese, t. II, 1961, pp. 127-275).