Bulletin de la Classe des sciences

Sur les involutions cycliques d'ordre trois sur une surface dont tous les genres sont égaux à l'unité

Lucien Godeaux

Résumé

Construction d'une surface dont tous les genres sont égaux à l'unité et sur cette surface de deux involutions cycliques du troisième ordre. La première possède six points unis de seconde espèce et a pour image une surface dont tous les genres sont égaux à l'unité. La seconde possède trois points unis de première espèce et a pour image une surface rationnelle.

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1973.60754

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les involutions cycliques d'ordre trois sur une surface dont tous les genres sont égaux à l'unité

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Construction d'une surface dont tous les genres sont égaux à l'unité et sur cette surface de deux involutions cycliques du troisième ordre. La première possède six points unis de seconde espèce et a pour image une surface dont tous les genres sont égaux à l'unité. La seconde possède trois points unis de première espèce et a pour image une surface rationnelle.

Dans nos recherches sur les involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface dont tous les genres sont égaux à l'unité ($p_a = P_4 = 1$), nous avons toujours supposé que les surfaces images des involutions n'étaient pas rationnelles (1). Dans cette note, nous construisons une surface F de genres $p_a = P_4 = 1$ et sur cette surface nous construisons deux involutions cycliques du troisième ordre. La première possède six points unis de seconde espèce et son image est une surface de genres $p_a = P_4 = 1$. La seconde involution possède trois points unis de première espèce et son image est une surface rationnelle. C'est l'existence de cette involution qui fait l'intérêt de cette note.

(1) *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un* (Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 1914, pp. 357-430; 1919, pp. 51-70). Voir également *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et Applications* (Rome, Edit. Cremonese, 1963).

On sait qu'Enriques a démontré que si entre deux surfaces algébriques F, F′, on a une correspondance $(1,n)$, les courbes qui correspondent sur F′ aux courbes canoniques de F jointes à la courbe unie, donne des courbes canoniques de F′. Nous montrons comment s'interprète ce théorème.

Le théorème que nous pouvons énoncer est le suivant:

Il existe sur une surface dont tous les genres sont égaux à l'unité ($p_a = P_4 = 1$) *des involutions cycliques du troisième ordre possédant trois points unis de première espèce et dont l'image est une surface rationnelle.*

1. Rapportons projectivement les cubiques d'un plan σ aux hyperplans d'un espace S_9 à neuf dimensions. Il correspond aux points de σ les points d'une surface Ψ d'ordre neuf. Aux droites de σ correspondent sur Ψ des cubiques gauches Γ_1 et aux coniques des courbes Γ_2 du sixième ordre, rationnelles. Si nous désignons par Γ_3 les sections hyperplanes de Ψ, on a

$$\Gamma_2 \equiv 2\Gamma_1,\ \Gamma_3 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2 \equiv 3\Gamma_1.$$

Si x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées des points de σ, posons

$$X_{11} = x_1^3,\ X_{12} = x_1^2x_2,\ X_{13} = x_1^2x_3,\ X = x_1x_2x_3,$$
$$X_{21} = x_2^2x_1,\ X_{22} = x_2^3,\ X_{23} = x_2^2x_3,$$
$$X_{31} = x_3^2x_1,\ X_{32} = x_3^2x_2,\ X_{33} = x_3^3.$$

Les équations de la surface Ψ s'obtiennent en écrivant que la matrice

$$\begin{Vmatrix} X_{11} & X_{21} & X_{31} & X & X_{13} & X_{12} \\ X_{12} & X_{22} & X_{32} & X_{23} & X & X_{21} \\ X_{13} & X_{23} & X_{33} & X_{31} & X_{13} & X \end{Vmatrix}$$

est de caractéristique un.

Supposons que l'espace S_9 soit une hyperplan d'un espace S_{10} et projetons Ψ d'un point O_0 de S_{10} n'appartenant pas à S_9. Nous obtenons un cône à trois dimensions (Ψ) dans lequel se trouvent ∞^2 cônes (Γ_1) projetant les cubiques gauches Γ_1 et ∞^5 cônes (Γ_2) d'ordre six projetant de O_0 les courbes (Γ_2). Enfin nous obtenons ∞^9 cônes (Γ_3) projetant les courbes Γ^3.

2. Coupons le cône (Ψ) par une hyperquadrique Q de S_{10} ne passant pas par le point O_0. Nous obtenons une surface F d'ordre 18. Nous indiquerons par C^1 les sections des cônes (Γ_1) par Q, par C^2 les sections des cônes (Γ_2) par Q et enfin par C^3 les sections des cônes (Γ_3) par Q.

Deux cônes (Γ^1) se rencontrant suivant une génératrice, le réseau $|C^1|$ a le degré deux.

Sur une courbe C^1, les génératrices du cône (Γ^1) découpent une série g_2^1 dont les points unis sont découpés par l'hyperplan polaire de O_0 par rapport à Q. Ces points unis sont donc au nombre de six. On en conclut que la courbe C^1 est de genre deux.

Une courbe de genre deux possède une seule série g_2^1 qui est la série canonique et par conséquent, la série canonique d'une courbe C^1 est découpée par les autres courbes C^1. Le réseau $|C^1|$ est donc son propre adjoint. La surface F possède donc une courbe canonique d'ordre zéro. Son genre géométrique est égal à l'unité et comme la surface F est régulière, il en est de même de son genre arithmétique.

Le fait que $|C^1|$ est son propre adjoint entraîne que les courbes pluricanoniques de la surface F sont toutes d'ordre zéro. La surface F est donc une surface caractérisée par $p_a = P_4 = 1$.

On a d'ailleurs

$$|C^{2\prime}| = |C^{1\prime} + C^1| = |2C^1| = |C^2|,$$

$$|C^{3\prime}| = |C^{1\prime} + C^2| = |3C^1| = |C^3|.$$

3. Considérons dans le plan σ l'homographie h non homologique d'équations

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3,$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité.

Elle engendre dans le plan σ une involution présentant trois points unis, O_{11}, O_{22}, O_{33} sommets du triangle de référence.

A l'homographie h correspond dans S_9 une homographie h' d'équations

$$\frac{X_{11}'}{X_{11}} = \frac{X_{22}'}{X_{22}} = \frac{X_{33}'}{X_{33}} = \frac{X'}{X} = \rho,$$

$$\frac{X_{12}'}{X_{12}} = \frac{X_{23}'}{X_{23}} = \frac{X_{31}'}{X_{31}} = \rho\varepsilon,$$

$$\frac{X_{13}'}{X_{13}} = \frac{X_{21}'}{X_{21}} = \frac{X_{32}'}{X_{32}} = \rho\varepsilon^2.$$

Dans S_{10}, désignons par $X_0 = 0$ l'équation de l'hyperplan S_9 de telle sorte que les coordonnées de O_0 soient toutes les coordonnées des points de S_9 nulles.

A l'un des points unis de h dans σ correspond un point uni de l'homographie h'. Celle-ci engendre donc sur Ψ une involution présentant trois points unis O_{11}, O_{22}, O_{33}.

On peut définir dans l'espace S_{10} une homographie H en ajoutant aux équations de h' l'une des équations

$$X'_0 = \rho X_0 \text{ ou } X'_0 = \rho\varepsilon X_0.$$

Il est inutile de considérer le cas $X'_0 = \rho\varepsilon^2 X_0$, car en posant $\eta = \varepsilon^2$ et en changeant les notations, on retrouve le second cas.

4. Envisageons le premier cas où l'hyperquadrique Q a pour équation

$$\varphi_2(X_0,X_{11},X_{22},X_{33},X) + \varphi_{11}(X_{12},X_{23},X_{31};X_{13},X_{23},X_{31}) = 0,$$

où φ_2 est une forme algébrique quadratique et φ_{11} une forme bilinéaire de leurs arguments.

La surface F est transformée en soi par H et cette homographie engendre sur cette surface une involution cubique I. Celle-ci possède six points unis: les points de rencontre de Q avec la droite O_0O_{11}, ceux de Q avec la droite O_0O_{22} et enfin ceux de Q avec la droite O_0O_{33}.

Ces points sont évidemment des points unis de même espèce pour l'involution I et il suffit de déterminer la structure de l'un d'eux. On ne nuit pas à la généralité en supposant que l'un de ces points est le point O_{11}, le terme en X_{11}^2 manquant alors dans l'équation de Q.

Le plan tangent en O_{11} à l'hyperquadrique Q a pour équation

$$\lambda_0 X_0 + \lambda_2 X_{22} + \lambda_3 X_{33} + \lambda X = 0.$$

Il ne peut passer par O_0 car Q ne touche pas la droite O_0O_{11} en O_{11}. On a donc $\lambda_0 \neq 0$ et le plan tangent à Q en F se trouve dans l'espace

$$O_{11}O_{23}O_{31}O_{12}O_{13}O_{21}O_{32}.$$

Or dans cet espace, H détermine une homographie non homologique et le plan tangent en O_{11} à Q doit se reproduire multiplié par $\varepsilon^0 = 1$. On en conclut que ce plan tangent s'appuie en un point sur chacun des plans $O_{23}O_{31}O_{12}$ et $O_{13}O_{21}O_{32}$. Le point O_{11} est donc uni de seconde espèce pour I.

L'involution I possède donc six points unis de seconde espèce et entre λ genres arithmétiques $p_a = 1$ de F et celui p'_a de la surface Φ image de l'involution, nous avons la relation (1)

$$12(p_a + 1) = 3.12(p'_a + 1) - 6.8,$$

d'où $p'_a = 1$. La surface Φ est, comme F, régulière et toutes les courbes pluricanoniques sont d'ordre zéro, donc c'est une surface de genres $p_a = P_4 = 1$. C'est le cas des involutions que nous avons étudiées dans nos travaux antérieurs.

5. On peut obtenir un modèle projectif de la surface Φ en rapportant projectivement les sections de F par les hyperplans

$$\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_{11} + \lambda_2 X_{22} + \lambda_3 X_{33} + \lambda X = 0 \tag{1}$$

aux hyperplans d'un espace S_4 à quatre dimensions.

Les hyperplans (1) découpent sur F des courbes du système $|\,3C^1\,| = |\,C^3\,|$, donc de genre dix. Elles forment un système linéaire composé au moyen de l'involution I, de degré 18. Donc la surface Φ dans S_4 est d'ordre six et ses sections hyperplanes ont le genre quatre.

Aux points unis de I correspondent des points doubles biplanaires de la surface Φ.

On sait que une courbe d'ordre six et de genre quatre située dans un S_3 section hyperplane de Φ a pour système canonique celui de ses sections hyperplanes, donc le système des sections hyperplanes de Φ est son propre adjoint.

Observons que la droite O_2O_3 de σ a pour homologue sur Ψ une cubique gauche transformée en soi par h'. Dans le cône (Γ_1) projetant cette cubique gauche, la courbe C^1 est transformée en soi sans que tous ses points soient unis pour H. A l'involution déterminée par H sur cette courbe correspond sur Φ une conique γ_1. De même, en partant des droites O_3O_1 et O_1O_2 on obtient deux coniques γ_2, γ_3 tracées sur Φ. La conique γ_1 passe par les points de diramation homologues des points unis situés sur les droites O_0O_{22} et O_0O_{33}, la conique γ_2 par les points homologues des points unis situés sur O_0O_{33} et O_0O_{11}, enfin la conique γ_3 par les points homologues des points unis situés sur O_0O_{11} et O_0O_{22}.

(1) *Théorie des involutions... loc. cit.*

6. Supposons maintenant que l'homographie H corresponde au cas $X_0' = \rho\varepsilon X_0$ et supposons que l'hyperquadrique Q ait pour équation

$$\varphi_2(X_0,X_{12},X_{23},X_{31}) + \varphi_{11}(X_{11},X_{22},X_{33},X; X_{13},X_{21},X_{32}) = 0,$$

les formes φ_2 et φ_{11} ayant la même signification que précédemment.

La surface F est transformée en soi par la nouvelle homographie H. L'involution déterminée sur F par cette homographie possède trois points unis O_{11}, O_{22}, O_{33} et trois seulement.

Il suffira d'étudier la structure de l'un d'eux, par exemple de O_{11}.

Le plan tangent à F au point O_{11} a pour équation

$$\varphi_{11}(1,O,O,O; X_{13},X_{21},X_{32}) = 0$$

et ce plan est donc dans l'espace

$$O_{11}O_0O_{23}O_{31}O_{12}O_{12}O_{23}O_{31}.$$

Dans cet espace, H détermine une homologie de centre O_{11}. Le plan tangent à la surface Ψ en O_{11} s'appuie en un point sur le plan $O_{12}O_{23}O_{31}$. D'autre part, la droite O_0O_{11} est unie pour H mais sur cette droite, H détermine une involution ayant deux points unis O_0 et O_{11}, donc la droite O_0O_{11} touche la surface F en O_{11} et le plan tangent à F en O_{11} rencontre suivant une droite l'axe $O_0O_{12}O_{23}O_{31}$ de H. Il en résulte que le point O_{11} est un point uni de première espèce pour l'involution déterminée par H sur F. Il en est de même des points O_{22} et O_{33}.

Entre le genre arithmétique $p_a = 1$ de F et celui p_a' de la surface Φ image de l'involution, nous avons la relation

$$12(p_a + 1) = 3.12(p_a' + 1) - 3.4,$$

d'où $p_a' = 0$. La surface Φ étant comme F régulière, on a $p_g = 0$ et la surface Φ est dépourvue de courbe canonique.

Les droites O_0O_{11}, O_0O_{22}, O_0O_{33} sont unies pour H mais ces droites touchent F respectivement en O_{11}, O_{22}, O_{33} et l'hyperplan polaire de O_0 par rapport à Q passe par ces points.

La droite $O_{22}O_{33}$ est unie pour H et il lui correspond sur F une courbe C^1 unie pour H. Cette courbe touche les droites O_0O_{22} et O_0O_{33} aux points O_{22}, O_{33}. Aux droites $O_{33}O_{11}$, $O_{11}O_{22}$ correspondent de même des courbes C^1 unies pour H.

7. Si la surface possédait une courbe bicanonique, nécessairement d'ordre zéro puisque la courbe bicanonique de F est d'ordre zéro, il existerait sur Φ un système linéaire $|\,G\,|$ de courbes de genre π et à ce système correspondrait un système linéaire $|\,G'\,|$ de même genre. Ces systèmes auraient la même dimension $\pi - 1$ et seraient l'adjoint l'un de l'autre.

Considérons sur la surface F le système découpé par les hyperplans

$$\lambda_1 X_{11} + \lambda_2 X_{22} + \lambda_3 X_{33} + \lambda X = 0.$$

Le système découpé paı les hyperplans

$$\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_{12} + \lambda_2 X_{23} + \lambda_3 X_{31} = 0,$$

et enfin le système découpé par les hyperplans

$$\lambda_1 X_{13} + \lambda_2 X_{21} + \lambda_3 X_{32} = 0.$$

Désignons respectivement par $|\,C_1^3\,|$, $|\,C_2^3\,|$, $|\,C_3^3\,|$ ces systèmes et par $|\,G_1\,|$, $|\,G_2\,|$, $|\,G_3\,|$ les systèmes qui leur correspondent sur Φ.

Les courbes C_1^3 ne passent pas par les points unis O_{11}, O_{22}, O_{33} et les courbes G^1 ont le genre quatre.

Les courbes C_2^3 passent simplement par les points unis de l'involution et les courbes G_2 ont le genre trois.

Les courbes C_3^3 passent deux fois par les points unis de l'involution et les courbes G_3 ont le genre un.

De plus ces systèmes ont respectivement les dimensions quatre, quatre et deux. Les courbes G_2 découpent sur chaque courbe G_1 la série canonique et $|\,G_2\,|$ est l'adjoint à $|\,G_1\,|$, mais ce système n'est pas l'adjoint à $|\,G_2\,|$. Il en résulte que la surface est dépourvue de courbe bicanonique et a le bigenre $P_2 = 0$. D'après le théorème de Castelnuovo, la surface Φ est donc rationnelle. Nous obtenons donc le théorème suivant:

Sur une surface dont tous les genres sont égaux à l'unité, il existe une involution cyclique cubique possédant trois points unis de première espèce et dont l'image est une surface rationnelle.

8. On sait qu'Enriques a démontré que le transformé du système canonique de Φ augmenté de la courbe de diramation, donne une courbe canonique de F.

(1) *Théorie des involutions... (loc. cit.).*

On sait que l'on peut prendre pour modèle projectif de Φ une surface possédant aux points de diramation O'_{11}, O'_{22}, O'_{33} homologues des points unis O_{11}, O_{22}, O_{33} des points triples à cône tangent rationnel. Chacun de ces points est équivalent à une courbe rationnelle de degré virtuel -2, soient δ_1, δ_2, δ_3 ces courbes. A ces courbes correspondent sur F des points simples de F, c'est-à-dire une courbe d'ordre zéro. Aux courbes G_1 et $G_2 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$ correspondent sur F des courbes C_1^3, C_2^3 dont la différcncc cst unc courbe canonique de F. Ainsi s'interprète le théorème d'Enriques.

Liège, le 16 juillet 1973.