Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 5 août 1944, nos 7-9.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les variétés algébriques à trois dimensions sur lesquelles l'opération d'adjonction a la période trois,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Procédant par analogie avec la surface d'Enriques, dépourvue de courbe canonique mais possédant une courbe bicanonique d'ordre zéro, nous avons cherché à construire des variétés algébriques à trois dimensions possédant une propriété analogue. De même que la surface d'Enriques peut être obtenue comme image d'une involution du second ordre appartenant à une surface dont les courbes canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro, nous sommes parti d'une involution cyclique de période trois appartenant à une variété à trois dimensions dont les surfaces canoniques et pluricanoniques sont d'ordre zéro. Nous sommes ainsi arrivé à trouver les conditions d'existence d'une variété à trois dimensions sur laquelle l'opération d'adjonction a la période trois, c'est-à-dire d'une variété dépourvue de surfaces canonique et bicanonique, mais possédant une surface tricanonique (1). Cette variété peut se ramener birationnellement à une variété possédant neuf points quintuples et la surface tricanonique se réduit alors aux voisinages de ces points quintuples. Nous avons ensuite déterminé la structure de la surface

(1) Voir notre note sur *Un problème sur les variétés algébriques* (Revue Scientifique, Paris, janvier 1942).

tricanonique ([1]). Nous reprenons ce dernier point dans cette note pour en simplifier l'exposé ([2]).

Il était nécessaire, pour prouver l'existence effective des variétés rencontrées, d'en construire des exemples. Nous en avions déjà construit deux ([3]) ; nous en construisons ici un troisième, particulièrement simple. Il semble d'ailleurs que les différentes variétés ainsi construites ne soient pas réductibles l'une à l'autre par des transformations birationnelles.

1. Soit V une variété algébrique à trois dimensions sur laquelle tout système linéaire de surfaces soit son propre adjoint. Nous supposerons que cette variété est complètement régulière et qu'elle contient une involution cyclique I_3 d'ordre trois dont l'image Ω est dépourvue de surfaces canonique et bicanonique, mais possède une surface tricanonique.

La variété V possède des surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro et nous avons démontré que l'involution I_3 possède neuf points mais non parfaits ([4]).

Construisons sur la variété V un système linéaire $|F|$ de surfaces F, dépourvu de points-base, transformé en lui-même par la transformation génératrice de I_3 et contenant trois systèmes linéaires partiels $|F_1|$, $|F_2|$, $|F_3|$ appartenant à l'involution I_3, le premier

([1]) *Observations sur les variétés algébriques à trois dimensions sur lesquelles l'opération d'adjonction est périodique* (Bull. de la Soc. des Sc. de Liége, 1940).

([2]) Nous aurons à utiliser des propriétés relatives aux involutions cycliques appartenant à une surface algébrique ; voir à ce sujet notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

([3]) *Sur deux involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1937) ; *Une variété algébrique à trois dimensions sur laquelle l'opération d'adjonction a la période trois* (Bull. de l'Académie de Belgique, 1937).

([4]) *Recherches sur les involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions* (Annales Scient. de l'École Normale Supérieure, 1937, pp. 55-79).

étant dépourvu de points-base. Les systèmes $|F_2|$, $|F_3|$ ont alors pour points-base simples les neuf points unis de I_3. On peut alors supposer que $|F|$ est le système des sections hyperplanes de V, la transformation génératrice de l'involution I_3 étant alors une homographie H de l'espace ambiant, possédant trois axes ponctuels σ_1, σ_2, σ_3 dont le premier seul rencontre V aux neuf points unis de I_3. Les systèmes $|F_1|$, $|F_2|$, $|F_3|$ sont respectivement découpés sur V par les hyperplans passant par σ_2, σ_3, par σ_3, σ_1 et par σ_1, σ_2.

Soient A_1, A_2, ..., A_9 les points unis de l'involution I_3. En un de ces points A_i, l'espace tangent à V coupe σ_2 suivant une droite, σ_3 suivant un point et ne rencontre σ_1 qu'au seul point A_i. Dans la gerbe des tangentes à V en A_i, H détermine une homologie et dans le domaine du point A_i sur V, il existe un point uni parfait isolé A_{i0} et une droite infiniment petite a_i dont tous les points sont unis parfaits. Au domaine du point A_{i0} correspond sur la variété Ω une surface rationnelle ω_{i1} et aux points infiniment voisins de a_i correspondent les points d'une surface rationnelle ω_{i2}.

2. Désignons par Φ_1, Φ_2, Φ_3 les surfaces qui correspondent sur Ω respectivement aux surfaces F_1, F_2, F_3. Les systèmes $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, $|\Phi_3|$ sont complets. Le système $|\Phi_1|$ a comme surfaces fondamentales ω_{11}, ω_{21}, ..., ω_{91} et ω_{12}, ω_{22}, ..., ω_{92}. Le système $|\Phi_3|$ a comme surfaces fondamentales ω_{11}, ω_{21}, ..., ω_{91}. De plus, les dimensions des systèmes $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, $|\Phi_3|$ sont r, $r-1$, $r-2$.

Dans notre mémoire cité plus haut, nous avons montré que les surfaces Φ_3 découpent sur les surfaces Φ_1 le système canonique de celles-ci. Le système $|\Phi_1|$ ayant comme surfaces fondamentales les surfaces ω_{i1}, ω_{i2}, on en conclut que le système adjoint de $|\Phi_1|$ se compose de $|\Phi_3|$ augmenté éventuellement de surfaces fondamentales. Nous écrirons donc

$$|\Phi_1'| = |\Phi_3 + \Sigma\lambda_{i1}\omega_{i1} + \Sigma\lambda_{i2}\omega_{i2}|, \tag{1}$$

λ_{i1} et λ_{i2} $(i = 1, 2, \ldots, 9)$ étant des entiers.

Les surfaces Φ_2 découpent le système canonique sur une surface Φ_3 et on aura donc

$$|\Phi_3'| = |\Phi_2 + \Sigma\mu_{i1}\omega_{i1}|, \tag{2}$$

$\mu_{i1}(i = 1, 2, \ldots, 9)$ étant des entiers.

Les surfaces Φ_1 découpent le système canonique sur une surface Φ_2 et comme le système $|\Phi_2|$ n'a pas les surfaces ω_{i1}, ω_{i2} comme surfaces fondamentales, on a

$$|\Phi_2'| = |\Phi_1|. \tag{3}$$

3. D'après la théorie des involutions, les systèmes $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, $|\Phi_3|$ et les surfaces ω_{i1}, ω_{i2} sont liés par des relations fonctionnelles que nous écrivons sous la forme

$$|3\Phi_1| = |3\Phi_2 + \Sigma\xi_{i1}\omega_{i1} + \Sigma\xi_{i2}\omega_{i2}|, \tag{4}$$
$$|3\Phi_1| = |3\Phi_3 + \Sigma\eta_{i1}\omega_{i1} + \Sigma\eta_{i2}\omega_{i2}|, \tag{5}$$

ξ_{i1}, ξ_{i2}, η_{i1}, η_{i2} $(i = 1, 2, \ldots, 9)$ étant des entiers.

Considérons une surface Φ_2^* de $|\Phi_2|$. Sur la surface F_2 correspondante, I_3 détermine une involution cyclique présentant neuf points unis non parfaits. On a donc, sur la surface Φ_2^*, les relations fonctionnelles

$$3(\Phi_2^*, \Phi_1) \equiv 3(\Phi_2^*, \Phi_2) + 2\Sigma(\Phi_2^*, \omega_{i1}) + \Sigma(\Phi_2^*, \omega_{i1}),$$
$$3(\Phi^* \Phi_1) \equiv 3(\Phi_2^*, \Phi_3) + \Sigma(\Phi_2^*, \omega_{i1}) + 2\Sigma(\Phi_2^*, \omega_{i2}).$$

Considérons maintenant une surface Φ_3^* de $|\Phi_3|$. Sur la surface F_3 correspondante, I_3 détermine une involution ayant neuf points unis parfaits. On a par conséquent les relations fonctionnelles

$$3(\Phi_3^*, \Phi_1) \equiv 3(\Phi_3^*, \Phi_2) + \Sigma(\Phi_3^*, \omega_{i2}),$$
$$3(\Phi_3^*, \Phi_1) \equiv 3(\Phi_3^*, \Phi_3) + 2\Sigma(\Phi_3^*, \omega_{i2}).$$

Ces quatre dernières relations fonctionnelles doivent se déduire des relations (4) et (5), ce qui détermine les entiers ξ_{i1}, ξ_{i2}, η_{i1}, η_{i2}. On a finalement

$$|3\Phi_1| = |3\Phi_2 + 2\Sigma\omega_{i1} + \Sigma\omega_{i2}|, \tag{4'}$$

$$|3\Phi_1| = |3\Phi_3 + \Sigma\omega_{i1} + 2\Sigma\omega_{i2}|. \tag{5'}$$

4. Écrivons que les adjoints des deux membres de la relation (4') sont équivalents, en tenant compte des relations (1) et (3) ; nous obtenons

$$2\Phi_1 + \Phi_3 + \Sigma\lambda_{i1}\omega_{i1} + \Sigma\lambda_{i2}\omega_{i2} \equiv 2\Phi_2 + \Phi_1 + 2\Sigma\omega_{i1} + \Sigma\omega_{i2}.$$

Nous pouvons, dans cette relation, supprimer Φ_1 dans le second membre et une fois dans le premier membre. En écrivant de nouveau l'équivalence des adjoints des deux membres, nous obtenons

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Sigma(\lambda_{i1} + \omega_{i1})\omega_{i1} + \Sigma\lambda_{i2}\omega_{i2}$$
$$\equiv \Phi_1 + \Phi_1 + 2\Sigma\omega_{i2} + \Sigma\omega_{i2}.$$

Les surfaces ω_{i1}, ω_{i2} étant indépendantes, cette relation doit se réduire à l'identité et on a donc

$$\lambda_{i1} + \mu_{i1} = 2, \qquad \lambda_{i2} = 1.$$

Écrivons maintenant que les adjoints des deux membres de la relation (5') sont équivalents ; nous obtenons

$$2\Phi_1 + \Phi_3 + \Sigma\lambda_{i1}\omega_{i1} + \Sigma\lambda_{i2}\omega_{i2} \equiv 2\Phi_3 + \Phi_2$$
$$+ \Sigma(\mu_{i1} + 1)\omega_{i1} + 2\Sigma\omega_{i2}.$$

Effectuons la même opération après suppression de Φ_3, nous obtenons

$$\Phi_1 + \Phi_3 + 2\Sigma\lambda_{i1}\omega_{i1} + 2\Sigma\lambda_{i2}\omega_{i2} \equiv \Phi_3 + \Phi_1$$
$$+ \Sigma(\mu_{i1} + 1)\omega_{i1} + 2\Sigma\omega_{i2}.$$

On en conclut

$$2\lambda_{i1} = \mu_{i1} + 1, \qquad \lambda_{i2} = 1,$$

d'où $\lambda_{i1} = \mu_{i1} = 1$.

On a donc finalement

$$|\Phi'_1| = |\Phi_3 + \Sigma\omega_{i1} + \Sigma\omega_{i2}|, \qquad (1')$$

$$|\Phi'_3| = |\Phi_2 + \Sigma\omega_{i1}|. \qquad (2')$$

Cela étant, le biadjoint de $|\Phi_1|$ est

$$|\Phi''_1| = |\Phi'_3 + \Sigma\omega_{i1} + \Sigma\omega_{i2}| = |\Phi_2 + 2\Sigma\omega_{i1} + \Sigma\omega_{i2}|.$$

Le triadjoint de $|\Phi_1|$ est

$$|\Phi'''_1| = |\Phi'_2 + 2\Sigma\omega_{i1} + \Sigma\omega_{i2}| = |\Phi_1 + 2\Sigma\omega_{i1} + \Sigma\omega_{i2}|.$$

On a par suite

$$|\Phi'''_1 - \Phi_1| = |2\Sigma\omega_{i1} + \Sigma\omega_{i2}|$$

La variété Ω possède une seule surface tricanonique

$$2\Sigma\omega_{i1} + \Sigma\omega_{i2}.$$

5. On peut prendre r suffisamment grand, en remplaçant éventuellement $|F|$ par un de ses multiples, pour que $|\Phi_1|$ soit le système des sections hyperplanes de Ω. Alors cette variété possède neuf points de diramation isolés, $A'_1, A'_2, \ldots, A'_9$, correspondant respectivement aux points unis $A_1, A_2, \ldots, A_9$. Les points $A'_1, A'_2, \ldots, A'_9$ sont multiples d'ordre cinq pour Ω [1]. Chacun de ces points est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à un ensemble de deux surfaces rationnelles : un plan infiniment petit, infiniment voisin de A'_i et une surface réglée du quatrième ordre, ayant pour directive une droite et une cubique gauche, infiniment petite et infiniment voisine de A'_i. Le plan coïncide avec ω_{i1} et la surface réglée avec ω_{i2}. Ces deux surfaces se rencontrent suivant une droite.

Comme nous l'avons établi dans la note qui vient d'être citée, les surfaces F_1 passant par le point A_i

[1] *Sur les points unis de seconde espèce des involutions cycliques appartenant à une variété algébrique* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1938, pp. 385-396). Dans notre mémoire précédemment cité, nous avions par erreur dit que les points $A'_1, A'_2, \ldots, A'_9$ étaient quadruples ; cela est sans influence sur le résultat obtenu.

acquièrent en ce point un point double biplanaire ; l'un des plans tangents est fixe, c'est le plan uni pour l'homologie déterminée par H dans la gerbe des tangentes à V en A_i ; l'autre plan tangent varie en passant par l'axe de cette homologie. Deux surfaces F_1 passant par A_i ont en commun une courbe pour laquelle A_i est quintuple. Une des tangentes à cette courbe en A_i est l'axe de l'homologie dont il vient d'être question ; les quatre autres tangentes sont dans le plan d'homologie. Il en résulte que la section de Ω par l'espace commun à deux hyperplans passant par A'_i est une courbe ayant un point quintuple en A'_i ; cette courbe rencontre ω_{i1} en un point et ω_{i2} en quatre points ; ceci confirme les résultats rappelés ci-dessus.

6. Nous allons maintenant indiquer un nouvel exemple de variété Ω sur laquelle l'opération d'adjonction a la période trois.

Considérons, dans un espace linéaire S_5 à cinq dimensions, l'homographie cyclique de période trois, H, d'équations

$$\frac{x'_0}{x_0} = \frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_2} = \frac{x'_3}{\epsilon x_3} = \frac{x'_4}{\epsilon x_4} = \frac{x'_5}{\epsilon^2 x_5},$$

où ϵ est une racine cubique primitive de l'unité. L'homographie H présente trois axes ponctuels : le plan $\sigma_1(x_3 = x_4 = x_5 = 0)$, la droite $\sigma_2(x_0 = x_1 = x_2 = x_5 = 0)$ et le point $\sigma_3(x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0)$.

Les hypersurfaces cubiques transformées en elles-mêmes par H forment trois systèmes linéaires ; l'un d'eux est dépourvu de points-base et nous le désignerons par $|W_4^3|$. L'équation de $|W_4^3|$ s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\phi_3(x_0, x_1, x_2) + \psi_3(x_3, x_4) + ax_5^3 + x_3x_5\xi_1(x_0, x_1, x_2)\\ + x_4x_5\eta_1(x_0, x_1, x_2) = 0\end{aligned}$$

où $\phi_3, \psi_3, \xi_1, \eta_1$ so t des formes dont le degré est indiqué par l'indice. La dimension de $|W_4^3|$ est donc égale à 20.

Considérons deux hypersurfaces générales du système $|W_4^3|$ et soit V la variété à trois dimensions qu'elles ont en commun. La variété V est transformée en elle-même par H et cette homographie engendre, sur V, une involution I_3 d'ordre trois ayant neuf points unis, points d'intersection de V et de l'axe σ_1 de H.

Désignons par $|F|$ le système des sections hyperplanes de V. Les surfaces F sont des surfaces dont le système des sections hyperplanes constitue le système canonique complet [1], par conséquent, $|F|$ est son propre adjoint. La variété V possède une surface canonique et des surfaces pluricanoniques d'ordre zéro.

Le système $|F_1|$, de dimension deux, sera découpé sur V par les hyperplans passant par σ_2, σ_3 ; il est dépourvu de points-base.

Le système $|F_2|$, de dimension un, sera découpé sur V par les hyperplans passant par σ_3 et σ_1 ; il a comme points-base les neuf points unis de I_3.

Le système $|F_3|$ se compose d'une seule surface, découpée par l'hyperplan déterminé par σ_1, σ_2. La surface F_3 passe par les points unis de I_3 en touchant, en chacun de ces points, le plan qui projette σ_2.

Conservons les notations précédentes et remarquons que les surfaces F sont de genres $p_a = p_g = 5$, $p^{(1)} = 9$. On trouve, en utilisant les formules donnant les genres d'une surface image d'une involution, les résultats suivants :

Les surfaces Φ_1 sont de genres $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 4$. L'unique courbe canonique d'une surface Φ_1 est découpée par la surface Φ_3.

Les surfaces Φ_2 sont de genres $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 4$.

(1) Voir ENRIQUES-CAMPEDELLI, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* (Padova, Cedam, 1932) et deux notes que nous avons publiées récemment : *Sur les surfaces algébriques intersections complètes d'hypersurfaces* (REVISTA DE MATHEMATICAS DE L'UNIVERSIDAD DE TUCUMAN, 1942) ; *Sur les involutions appartenant à des variétés algébriques intersections complètes d'hypersurfaces* (BULL. DE L'ACAD. DE BELGIQUE, 1944, pp. 301-317).

Le système canonique d'une surface Φ_2 est découpé par les surfaces Φ_1.

La surface Φ_3 est de genres $p_a = p_g = 2$, $p^{(1)} = 1$. Le faisceau canonique de cette surface est découpé par les surfaces Φ_2.

8. Pour obtenir un modèle projectif de la variété Ω image de l'involution I_3 de V, rapportons projectivement les hypersurfaces W_4^3 aux hyperplans d'un espace linéaire S_{20} à 20 dimensions. Aux ternes de points de S_5 invariants pour H correspondent les points d'une variété W'_5, d'ordre 81. La variété Ω est la section de W' par un espace S_{18}.

Le système des sections hyperplanes du modèle projectif de Ω ainsi obtenue coïncide avec le système $|3\Phi_1|$. Le système canonique d'une section hyperplane est découpé par les surfaces $2\Phi_1 + \Phi_3$.

Il existe deux familles d'hypersurfaces d'ordre trois de S_{18} osculant Ω en tout point d'intersection et passant par les neuf points de diramation. Les surfaces de contact de l'une de ces familles sont les surfaces $2\Phi_1 + \Phi_3$; les surfaces de contact de l'autre famille sont les surfaces $2\Phi_1 + \Phi_2$.

La variété Ω s'obtient en partant du système $|3F|$. Ce système comprend trois systèmes linéaires appartenant à l'involution I_3. L'un de ces systèmes, comprenant les surfaces $3F_1$, est découpé sur V par les hypersurfaces W_4^3 ne passant pas par V. Les autres comprennent les surfaces $2F_1 + F_2$ et $2F_1 + F_3$.

Observons en passant que les surfaces du système $|2\Phi_1 + \Phi_2|$ sont projectivement canoniques. L'adjoint de ce système est en effet $|3\Phi_1|$ et le système canonique est donc découpé par les hyperplans. Les surfaces en question ont les genres $p_a = p_g = 19$, $p^{(1)} = 82$.

Liége, le 10 juillet 1944.