(*Dai « Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni »,*
Serie V, Vol. XV, fasc. 1-2 gennaio-giugno Roma, 1956)

Sulle congruenze W

Nota di **LUCIEN GODEAUX** (a Liegi) (*)

Le congruenze W sono state studiate, dal punto di vista della Geometria proiettiva differenziale, da varii autori. Si può vedere, su questo argomento, il Trattato di FUBINI e ČECH [1], quello di TZITZEICA [2] e quello di BOL [3]. In parecchie note, abbiamo studiato queste congruenze coll'uso della rappresentazione delle rette dello spazio sulla iperquadrica di KLEIN, di S_5. Questo metodo è anche stato utilizzato da TERRACINI [4]. Qui vogliamo esporre alcuni dei risultati che abbiamo ottenuti [5].

Ad una congruenza W, associamo quattro successioni di LAPLACE nello spazio S_5. Se noi chiamamo (x) e $(\bar{x})$ le superficie focali della congruenza, ad ognuna di queste superficie è associata una successione di LAPLACE che contiene le immagini delle tangenti alle asintotiche; sia L la successione associata ad (x) e $\bar{L}$ quella associata ad $(\bar{x})$. Una terza successione di LAPLACE, $\mathcal{J}$, è determinata dal punto J rappresentante la retta j generatrice della congruenza. Infine, la quarta successione di LAPLACE, $\mathcal{P}$, è determinata dal punto P, seconda immagine del complesso lineare osculatore alla congruenza. La successione $\mathcal{J}$ è iscritta nelle successioni $L, \bar{L}$ e queste sono iscritte nella successione $\mathcal{P}$.

Le successioni $L, \bar{L}$ sono autopolari rispetto all'iperquadrica di KLEIN e le successioni $\mathcal{J}$ e $\mathcal{P}$ sono coniugate l'una dell'altra rispetto a questa iperquadrica. Possiamo allora considerare una successione di quadriche associata alla congruenza W. Questa successione generalizza, in un certo senso, la successione di quadriche che abbiamo altrove associata ad una superficie.

(*) Il presente Articolo formò oggetto di una conferenza di seminario presso il Corso del CIME sulla Geometria differenziale svoltosi a Pavia dal 26 settembre al 5 ottobre 1955.

1. Consideriamo una congruenza W generata da una retta j e ne siano (x), $(\bar{x})$ le superficie focali, essendo u, v le asintotiche di queste superficie.

Le coordinate normali di Wilczynski del punto x della superficie (x) soddisfanno a un sistema completamente integrabile di equazioni alle derivate parziali

$$x^{20} + 2\,b\,x^{01} + c_1\,x = 0\,,$$

$$x^{02} + 2\,a\,x^{10} + c_2\,x = 0\,,$$

dove noi scriviamo

$$x^{ik} = \frac{\partial^{i+k}\,x_x}{\partial\,u^i\,\partial\,v^k}.$$

Diciamo U, V i punti dell'iperquadrica Q di Klein, di S_5, che rappresentano le tangenti xx^{10}, xx^{01} alle asintotiche u, v nel punto x della superficie (x). Abbiamo

$$U^{10} + 2\,b\,V = 0\,,\quad V^{01} + 2\,a\,U = 0$$

ed i punti U, V sono trasformati di Laplace l'uno dell'altro (Bompiani, Tzitzeica). Appartengono ad una successione di Laplace:

$$\ldots,\ U_n,\ldots,\ U_1,\ U,\ V,\ V_1,\ldots,\ V_n,\ldots, \tag{L}$$

dove ogni punto è il trasformato di Laplace del precedente nel senso delle u.

Rammentiamo che la successione L è autopolare rispetto a Q. Precisamente, l'iperpiano polare di U_n è $V_{n-2}\,V_{n-1}\,V_n\,V_{n+1}\,V_{n+2}$ e quello di V_n è $U_{n-2}\,U_{n-1}\,U_n\,U_{n+1}\,U_{n+2}$.

Alla retta j della congruenza W corrisponde sopra Q un punto

$$J = \lambda\,U - \mu\,V$$

della retta $U\,V$, dove si ha (Demoulin)

$$\mu^{10} + 2\,b\,\lambda = 0\,,\quad \lambda^{01} + 2\,a\,\mu = 0\,.$$

Il punto J appartiene ad una successione di Laplace

$$\ldots,\ J_n,\ldots,\ J_1,\ J,\ J_{-1},\ldots,\ J_{-n},\ldots, \tag{$\mathcal{J}$}$$

dove ogni punto è il trasformato del precedente nel senso delle u.

La successione $\mathcal{J}$ è iscritta nella L: il punto J_n appartiene alla retta $U_{n-1}\,U_n$ ed il punto J_{-n} alla retta $V_{n-1}\,V_n$.

2. Consideriamo uno spazio S_6 di cui lo S_5 di Q è un iperpiano. Diciamo O un punto di S_6 fuori di S_5. Le coordinate di un punto X di S_6 saranno le sei coordinate del punto intersezione della retta OX con S_5 ed un settimo numero X_0. L'equazione dello iperpiano S_5 sarà quindi $X_0 = 0$ e le coordinate di O saranno $(0, 0, \dots, 0, 1)$.

Adesso, consideriamo un punto U' di cui le coordinate sono quelle di U e μ, poi un punto V' di cui le coordinate sono quelle di V e λ. Abbiamo

$$U'^{10} + 2\,b\,V' = 0, \quad V'^{01} + 2\,a\,U' = 0\,.$$

I punti U', V' appartengono quindi ad una successione di Laplace

$$\dots, U'_n, \dots, U'_1, U', V', V'_1, \dots V'_n, \dots \qquad (L')$$

in cui ogni punto è il trasformato del precedente nel senso delle u.

Si vede subito che la successione L è la proiezione della successione L' da O sull'iperpiano $X_0 = 0$, cioè sopra S_5. Di più, il punto J è l'intersezione della retta $U'U'$ con $S_5, \dots$, il punto J_n quella di $U'_{n-1}\,U'_n$ con S_5 ed il punto J_{-n}della retta $V'_{n-1}\,V'_n$ con S_5.

Poniamo

$$h_i = -(\log.\, b\, h_1\, h_2 \dots h_{i-1})^{11} + h_{i-1}\,,$$

$$k_i = -(\log.\, a\, k_1\, k_2 \dots k_{i-1})^{11} + k_{i-1}\,,$$

$$h_0 = k_0 = 4\,a\,b\,.$$

I punti U_n, V_n soddisfanno a equazioni di Laplace di cui gli invarianti sono rispettivamente h_n e h_{n+1}, k_n e k_{n+1}. Si ha

$$U_n^{01} = U_{n+1} + U_n (\log.\, b\, h_1\, h_2 \dots h_n)^{01}, \quad U_n^{10} = h_n\, U_{n-1}\,,$$

$$V_n^{10} = V_{n+1} + V_n (\log.\, a\, k_1\, k_2 \dots k_n)^{10}, \quad U_n^{01} = k_n\, V_{n-1}\,.$$

Ma i punti della successione L' soddisfanno le stesse equazioni di Laplace che i punti corrispondenti della successione L. Quindi, se noi diciamo μ_n l'ultima coordinata di U'_n e λ_n l'ultima di V'_n, abbiamo

$$J_n = \mu_{n-1}\, U_n - \mu_n\, U_{n-1}, \quad J_{-n} = \lambda_{n-1}\, V_n - \lambda_n\, V_{n-1}$$

e

$$\mu_n^{01} = \mu_{n+1} + \mu_n (\log. b\, h_2 h_2 \ldots h_n)^{01}, \quad \mu_n^{10} = h_n \mu_{n-1},$$

$$\lambda_n^{10} = \lambda_{n+1} + \lambda_n (\log. a\, k_1 k_2 \ldots k_n)^{10}, \quad \lambda_n^{01} = k_n \lambda_{n-1}.$$

3. Diciamo $\overline{U}$, $\overline{V}$ i punti di Q che rappresentano le tangenti $\overline{x\, x^{10}}, \overline{x\, x^{01}}$ nel punto $\overline{x}$ alla superficie $(\overline{x})$. Questi punti sono trasformati di LAPLACE l'uno dell'altro e appartengono ad una successione di LAPLACE

$$\ldots, \overline{U}_n, \ldots, \overline{U}_1, \overline{U}, \overline{V}, \overline{V}_1, \ldots, \overline{V}_n, \ldots \qquad (\overline{L})$$

che ha le stesse proprietà della successione L.

Il punto J è l'intersezione delle rette UV, $\overline{U}\ \overline{V}, \ldots$, il punto J_n quella delle rette $U_{n-1} U_n$ e $\overline{U}_{n-1} \overline{U}_n$, il punto J_{-n} quella delle rette $V_{n-1} V_n$ e $\overline{V}_{n-1} \overline{V}_n$.

Possiamo associare alla congruenza W una quarta successione di LAPLACE. Diciamo P il polo rispetto a Q dell'iperpiano $J_2 J_1 J J_{-1} J_{-2}$ (imagine del complesso lineare osculatore alla congruenza W). Si vede subito che lo spazio coniugato rispetto a Q della retta $U\,\overline{U}$ è $J_1 J J_{-1} J_{-2}$ e quello della retta $V\,\overline{V}$ è $J_2 J_1 J J_{-1}$. Quindi il punto P è l'intersezione delle rette $U\,\overline{U}$ e $V\,\overline{V}$.

Si dimostra, nello stesso modo, che il punto P_{-n}, polo rispetto a Q dell'iperpiano $J_{n-2} J_{n-1} J_n J_{n+1} J_{n+2}$ appartiene alle rette $V_n \overline{V}_n$, $V_{n-1} \overline{V}_{n-1}$ e che il punto P_n, polo dell'iperpiano $J_{-n-2} J_{-n-1} J_{-n} J_{-n+1} J_{-n+2}$ appartiene alle rette $U_n \overline{U}_n$, $U_{n-1} \overline{U}_{n-1}$.

I punti così ottenuti appartengono ad una successione di LAPLACE

$$\ldots, P_n, \ldots, P_1, P, P_{-1}, \ldots, P_{-n}, \ldots, \qquad (P)$$

di cui ogni punto è il trasformato del precedente nel senso delle u.

4. Vogliamo determinare il punto P in funzione dei punti U_2, U_1, U, V, V_1, V_2.

Indichiamo con

$$\Omega(X, Y) = 0$$

la condizione perchè i punti X, Y siano coniugati rispetto a Q, cioè l'equazione della polarità rispetto a Q.

Dobbiamo avere

$$\Omega(P, J_2) = 0, \Omega(P, J_1) = 0, \Omega(P, J) = 0, \Omega(P, J_{-1}) = 0, \Omega(P, J_{-2}) = 0.$$

Un calcolo semplice mostra che si ha

$$P = [\mu_2 + \mu_1 (\log. b\, h_1)^{01} + \beta\, \mu]\, U - [\mu_1 - \mu (\log. b\, h_1)^{01}]\, U_1 + \mu\, U_2$$

$$- [\lambda_2 + \lambda_1 (\log. a\, k_1)^{10} + \alpha\, \lambda]\, V - [\lambda_1 - \lambda (\log. a\, k_1)^{10}]\, V_1 - \lambda\, V_2 .$$

Abbiamo già ottenute altrove le relazioni

$$2\, V_3 + 2\, V_2 (\log. a^3 k_1^2 k_2)^{10} + 2\, \alpha_1\, V_1 + \alpha\, (\log. a^2\, \alpha)^{10}\, V +$$

$$+ 4\, b\, [\beta\, U + U_1 (\log. b\, h_1)^{01} + U_2] = 0 ,$$

$$2\, U_3 + 2\, U_2 (\log. b^3 h_1^2 h_2)^{01} + 2\, \beta_1\, U_1 + \beta\, (\log. b^2 \beta)^{01}\, U +$$

$$+ 4\, a\, [\alpha\, V + V_1 (\log. a\, k_1)^{10} + V_2] = 0 ,$$

dove

$$\alpha = 2\, (\log. a)^{20} + [(\log. a)^{10}]^2 + 4\, (b^{01} + c_1) ,$$

$$\beta = 2\, (\log. b)^{02} + [(\log. b)^{01})]^2 + 4\, (a^{10} + c_2) ,$$

$$\alpha_1 = \alpha + (\log. a\, k_1)^{20} + (\log. a\, k_1)^{10} (\log. a^2\, k_1)^{10} ,$$

$$\beta_1 = \beta + (\log. b\, h_1)^{02} + (\log. b\, h_1)^{01} (\log. b^2\, h_1)^{01} .$$

Poniamo

$$\eta = - 2\, \lambda_3 - 2\, \lambda_2 (\log. a^3 k_1^2 k_2)^{10} - 2\, \alpha_1\, \lambda_1 - \lambda\, \alpha\, (\log. a^2 \alpha)^{10} -$$

$$- 4\, b\, [\beta\, \mu + \mu_1 (\log. b\, h_1)^{01} + \mu_2] ,$$

$$\xi = 2\, \mu_3 + 2\, \mu_2 (\log. b^3 h_1^2 h_2)^{01} + 2\, \beta_1\, \mu_1 - \mu\, \beta\, (\log. b^2\, \beta)^{01} +$$

$$+ 4\, a\, [\alpha\, \lambda + \lambda_1 (\log. a\, k_1)^{10} + \lambda_2] .$$

Abbiamo

$$2\, P^{10} = \eta\, V, \qquad 2\, P^{01} = \xi\, U$$

e

$$\eta^{01} + 2\, b\, \xi = 0 , \qquad \xi^{10} + 2\, a\, \eta = 0 ,$$

$$P^{11} - P^{10} (\log. \eta)^{01} - P^{01} (\log. \xi)^{10} = 0 .$$

Possiamo anche scrivere

$$P^{11} + 2\, b\, \frac{\xi}{\eta}\, P^{10} + 2\, a\, \frac{\eta}{\xi}\, P^{01} = 0 .$$

5. Il trasformato di LAPLACE, P_{-1}, del punto P nel senso delle u è dato da

$$P_{-1} = P^{10} - P\,(\log.\,\xi)^{10}$$

e quello P_1 nel senso della v da

$$P_1 = P^{01} - P\,(\log.\,\eta)^{01}.$$

Si ha

$$P_{-1}^{01} - P_{-1}\,(\log.\,\eta)^{01} = \xi_1\,P,$$

dove

$$\xi_1 = -(\log.\,\xi)^{11} + 4\,a\,b\,.$$

Il trasformato di LAPLACE di P_{-1} nel senso delle u è

$$P_{-2} = P_{-1}^{10} - P_{-1}\,(\log.\,\xi\,\xi_1)^{10}\,.$$

Si ha, nello stesso modo, per il trasformato di LAPLACE di P_1 nel senso delle v,

$$P_2 = P_1^{01} - P_1\,(\log.\,\eta\,\eta_1)^{01}\,,$$

dove

$$\eta_1 = -(\log.\,\eta)^{11} + 4\,a\,b\,.$$

6. Il punto $\bar{U}$ si trova sulla retta $U\,P$ e sopra Q. Poniamo

$$\bar{U} = P + r\,U\,.$$

Abbiamo

$$\Omega\,(\bar{U}\,, \bar{U}) = \Omega\,(P\,, P) + 2\,r\,\Omega\,(P\,, U) = 0\,.$$

Ora

$$\Omega\,(P\,, P) = -\,2\,\psi\,\Delta\,,$$

dove

$$\psi = \lambda\,[2\,\lambda_2 + 2\,\lambda_1\,(\log.\,a\,k_1)^{10} + \lambda\,\alpha] - \lambda_1^2 -$$

$$-\,\mu\,[2\,\mu_2 + 2\,\mu_1\,(\log.\,b\,h_1)^{01} + \mu\,\beta] + \mu_1^2\,,$$

$$\Delta = |\,x \quad x^{10} \quad x^{01} \quad x^{11}\,|\,.$$

Dunque, poichè $\Omega\,(P\,, U) = 2\,\mu\,\Delta$, si ha

$$2\,r\,\mu - \psi = 0\,.$$

Scriveremo, cambiando il fattore di proporzionalità di $\overline{U}$,

$$\overline{U} = 2\,\mu\,P + \psi\,U\,.$$

Abbiamo anche

$$\overline{V} = 2\,\lambda\,P + \psi\,V\,.$$

Osserviamo chi si ha

$$\psi^{10} + \lambda\,\eta = 0\,,\ \psi^{01} + \mu\,\xi = 0\,,$$

$$\lambda\,\overline{U} - \mu\,\overline{V} = \psi\,(\lambda\,U - \mu\,V) = \psi\,J,$$

poi

$$\psi\,[\overline{U}^{10} + 2\,b\,\overline{V}] + \eta\,[\lambda\,\overline{U} - \mu\,\overline{V}] = 0\,,$$

$$\psi\,[\overline{V}^{01} + 2\,a\,\overline{U}] + \xi\,[\mu\,\overline{V} - \lambda\,\overline{U}] = 0\,.$$

Cambiando $\overline{U}$ e $\overline{V}$ in $\psi\,\overline{U}$, $\psi\,\overline{V}$, abbiamo finalmente

$$\psi\,\overline{U} = 2\,\mu\,P + \psi\,U\,,\ \psi\,\overline{V} = 2\,\lambda\,P + \psi\,V$$

e

$$\overline{U}^{10} + \frac{\mu}{\lambda}\left(\log.\frac{\psi}{\mu}\right)^{10}\overline{V} = 0\,,\quad \overline{V}^{01} + \frac{\lambda}{\mu}\left(\log.\frac{\psi}{\lambda}\right)^{01}\overline{U} = 0\,.$$

Possiamo porre

$$2\,\overline{b} = \frac{\mu}{\lambda}\left(\log.\frac{\psi}{\mu}\right)^{10},\quad 2\,\overline{a} = \frac{\lambda}{\mu}\left(\log.\frac{\psi}{\lambda}\right)^{01},$$

poi

$$\overline{h}_1 = -\,(\log.\,\overline{b})^{11} + 4\,\overline{ab}\,,\quad \overline{k}_1 = -\,(\log.\,\overline{a})^{11} + \overline{ab}\,,\ldots$$

e dedurne $\overline{U}_1$, $\overline{V}_1$, ...

Osserviamo che se poniamo

$$\lambda = \psi\,\overline{\lambda}\,,\ \mu = \psi\,\overline{\mu}\,,$$

abbiamo

$$\overline{\lambda}^{01} + 2\,\overline{a}\,\overline{\mu} = 0\,,\ \overline{\mu}^{10} + 2\,\overline{b}\,\overline{\lambda} = 0$$

e

$$\overline{\lambda}\,\overline{U} - \overline{\mu}\,\overline{V} = \frac{1}{\psi}\,J.$$

7. Osserviamo che se la congruenza W considerata appartiene ad un complesso lineare, il punto P è fisso e si ha $\xi = 0$, $\eta = 0$.

Viceversa, se l'una delle quantità ξ, η è nulla, ad esempio ξ, e se la superficie (x) non è rigata ($a \neq 0$), si ha anche $\eta = 0$ ed il punto P è fisso.

Perchè una congruenza W appartenga ad un complesso lineare, occorre e basta che $\xi = 0$, $\eta = 0$. Se la superficie focale (x) non è rigata, basta che l'una o l'altra di queste quantità sia nulla.

8. Ad una conguenza W possiamo associare una successione di quadriche.

Rammentiamo che, essendo i piani $U_n\, U_{n+1}\, U_{n+2}$ coniugati rispetto a Q, le sezioni di questa iperquadrica con questi piani rappresentano i due sistemi di generatrici rettilinee di una quadrica Φ_n. Abbiamo così una successione di quadriche $\Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_n, \ldots$ di cui la prima è la quadrica di LIE. Due quadriche consecutive si toccano in quattro punti che sono caratteristici per le due quadriche. Questa successione di quadriche è associata al punto x della superficie focale (x).

Al secondo fuoco $\bar{x}$ della retta j è associata una seconda successione di quadriche $\bar{\Phi}, \bar{\Phi}_1, \ldots, \bar{\Phi}_n, \ldots$.

Consideriamo adesso i piani $J_n\, J_{n+1}\, J_{n+2}$, $P_{-n}\, P_{-n-1}\, P_{-n-2}$. Essi sono coniugati rispetto a Q e le sezioni di Q con questi piani rappresentano i due sistemi di generatrici rettilinee di una quadrica Ψ_n. Per $n = 0, 1, \ldots$, abbiamo così una successione di quadriche $\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_n, \ldots$.

Consideriamo due quadriche successive Ψ_n, Ψ_{n+1}. Esse hanno in comune quattro rette: due sono rappresentate dai punti di intersezione di Q colla retta $J_{n+1}\, J_{n+2}$ e due dai punti di Q che appartengono alla retta $P_{-n-1}\, P_{-n-2}$. Quindi, Ψ_n, Ψ_{n+1} si toccano in quattro punti e si sa che questi punti sono caratteristici per le due quadriche.

Le quadriche Φ_n e Ψ_n hanno in comune quattro rette. Due di queste rette sono rappresentate dai punti di Q che appartengono alla retta $J_n\, J_{n+1}$. Essi appartengono alle quadriche $\bar{\Phi}_n$ e Ψ_{n-1}. Le due altre rette sono rappresentate dalle intersezioni della retta $V_{n+1}\, V_{n+2}$ con Q. Notiamo che i punti di intersezione di Q con $\bar{V}_{n+1}\, \bar{V}_{n+2}$ rappresentano due rette comuni $\Psi_n, \bar{\Phi}_n$.

Le quadriche Φ_n e $\bar{\Phi}_n$ hanno in comune le quattro rette rappresentate dai punti di intersezione di $J_n\, J_{n+1}$, $J_{-n}\, J_{-n-1}$ con Q.

Notiamo con Ψ_{-n} la quadrica che corrisponde ai piani $J_{-n}\,J_{-n-1}\,J_{-n-2}$ e $P_n\,P_{n+1}\,P_{n+2}$, coniugati rispetto a Q. Abbiamo così una seconda successione di quadriche $\Psi_{-0}, \Psi_{-1}, \ldots, \Psi_{-n}, \ldots$.

I piani $J_n\,J_{n+1}\,J_{n+2}$ e $P_n\,P_{n+1}\,P_{n+2}$ appartengono ad uno spazio a quattro dimensioni ed hanno in comune il punto J_{n+1}. I piani $J_{-n}\,J_{-n-1}\,J_{-n-2}$ e $P_{-n}\,P_{-n-1}\,P_{-n-2}$ hanno in comune il punto J_{-n-1}. Quindi le quadriche Ψ_n e Ψ_{-n} non hanno in generale rette in comune.

9. Consideriamo adesso le quadriche Ψ_0 e Ψ_{-0}; la prima corrisponde ai piani $J\,J_1\,J_2$ e $P\,P_{-1}\,P_{-2}$, l'altra ai piani $J\,J_{-1}\,J_{-2}$ e $P\,P_1\,P_2$.

Possiamo anche considerare la quadrica Ψ rappresentata dai piani $J_1\,J\,J_{-1}$ e $P_{-1}\,P\,P_1$. Ma questa quadrica è spezzata in due piani. Infatti, il piano $P_{-1}\,P\,P_1$ contiene le rette $U\,V$ e $\overline{U}\,\overline{V}$, quindi, se noi chiamamo ξ e $\overline{\xi}$ i piani tangenti alle superficie $(x), (\overline{x})$ nei punti $x, \overline{x}$, questo piano rappresenta i fasci di raggi (x, ξ) e $(\overline{x}, \overline{\xi})$. Allora, si vede facilmente che il piano $J_1\,J\,J_{-1}$, che tocca Q nel punto J, rappresenta i fasci di raggi $(x, \overline{\xi}), (\overline{x}, \xi)$.

Vogliamo determinare i punti caratteristici della quadrica Ψ_0. Questa quadrica ha in comune colla quadrica Ψ_1 le rette rappresentate dalle intersezioni con Q delle rette $J_1\,J_2$ e $P_{-1}\,P_{-2}$. Essa tocca dunque Ψ_1 in quattro punti che sono, come l'abbiamo richiamato, caratteristici per le due quadriche. La retta $J\,J_1$ tocca Q nel punto J e la retta $P\,P_{-1}$ taglia Q nei punti $V, \overline{V}$. Dunque, Ψ_0 tocca le superficie focali $(x), (\overline{x})$ nei punti $x, \overline{x}$. Ognuno di questi punti conta per due punti caratteristici.

La quadrica Ψ_{-0} tocca anche $(x), (\overline{x})$ nei fuochi della retta j.

Le quadriche Ψ_0 e Ψ_{-0} hanno in comune la retta j e una cubica sghemba passante per i punti $x, \overline{x}$.

10. Possiamo ritrovare agevolmente un risultato ottenuto dal Demoulin con altro metodo.

Consideriamo l'omologia armonica θ di S_5, di centro P e di iperpiano $J_2\,J_1\,J\,J_{-1}\,J_{-2}$, che muta Q in se stessa.

I punti $U, \overline{U}$ sono coniugati rispetto a θ. I piani $U\,U_1\,U_2$ e $\overline{U}\,\overline{U}_1\,\overline{U}_2$ s'incontrano in una retta $J_1\,J_2$ che appartiene all'iperpiano di omologia, dunque questi piani sono coniugati rispetto a θ. Ne risulta il teorema di Demoulin: Le quadriche di Lie $\Phi, \overline{\Phi}$ sono coniugate rispetto al complesso lineare (o sistema-nullo) osculatore alla congruenza W.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Fubini-E. Čech : *Geometria proiettiva differenziale.* (Bologna, Zanichelli, 1926, due volumi) : *Introduction à la Géométrie projective différentielle des surfaces.* (Paris, Gauthier-Villars, 1931).

[2] G. Tzitzeica. *Géométrie différentielle projective des réseaux.* (Paris, Gauthier-Villars, 1924).

[3] G. Bol. *Projektive Differential- Geometrie.* (Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1950, 1954).

[4] A. Terracini. *Sulla teoria delle congruenze W.* (Rendiconti dell'Istituto Lombardo, 1927, pp. 657-674) ; *Nuove ricerche sulle congruenze W* (Atti dell'Istituto Veneto, 1927-1928, pp. 179-196).

[5] L. Godeaux, *Sur quelques familles de quadriques attachées aux points d'une surface.* (Annales de la Société Polonaise de Mathématiques, 1928, pp. 212-226) ; *La théorie des surfaces et l'espace réglé.* (Actualités scientifiques, N° 138, Paris, Hermann, 1934) ; *Alcune osservazioni sulle congruenze W.* (Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Torino, 1953-1954, pp. 39-46) ; *Sur quatre suites de Laplace associées à une congruence* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1954, pp. 880-885) ; *Sur la théorie des congruences W.* (Idem, 1954, pp. 1028-1037 ; 1955, pp. 343-345) ·

[*Entrata in redazione il 17 ottobre 1955*]