Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 5 février 1938, n° 2.

Sur la construction de surfaces et de variétés algébriques de diviseur supérieur à l'unité,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

On sait que M. Severi a introduit un invariant d'une surface algébrique qu'il appelle le *diviseur* σ de la surface; c'est le nombre maximum des systèmes de courbes distincts de la surface qui admettent un même système comme multiple [1].

Nous avons établi que si la surface F est l'image d'une involution cyclique d'ordre premier p, privée de points unis, appartenant à une surface algébrique régulière, le diviseur σ de la surface F est multiple de p [2]. Si d'ailleurs la surface support de l'involution est de diviseur un, le diviseur de σ est égal à p. Cette remarque permet de construire des surfaces de diviseur quelconque.

Dans cette courte note, nous nous proposons de construire, en utilisant le résultat précédent, des surfaces et des variétés algébriques de diviseur supérieur à l'unité.

1. Considérons, dans un espace linéaire S_{r+s+1} à $r+s+1$ dimensions, deux espaces linéaires S_r à r dimensions et S_s, à s dimensions, n'ayant aucun point commun. Nous désignerons par $x_0, x_1, \dots, x_r$ les coordonnées projectives des points

(1) SEVERI, La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique (*Annales de l'École normale supérieure*, 1908, pp. 419-468).

(2) Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie*, 1914, pp. 362-368). Voir aussi A. COMESSATTI, Sulle superficie multiple cicliche (*Rendiconti del Seminario matematico di Padova*, 1930, pp. 1-45).

de S_r; par $y_0, y_1, \ldots, y_s$ celles des points de S_s, de telle sorte que les coordonnées projectives des points de S_{r+s+1} soient $x_0, x_1, \ldots, x_r, y_0, y_1, \ldots, y_s$. Nous supposerons $r > s$.

Les hypersurfaces d'ordre n de l'espace S_s dépendent de $N = \binom{n+s}{s} - 1$ paramètres. Considérons, dans cet espace, un système linéaire simple, dépourvu de points-base, d'hypersurfaces d'ordre n. La dimension ρ de ce système satisfait à la double inégalité

$$s < \rho \leq N,$$

et le degré de ce système est égal à n^s. Nous écrirons l'équation de ce système sous la forme

$$\lambda_0 \psi_0 (y_0, y_1, \ldots, y_s) + \lambda_1 \psi_1 + \cdots + \lambda_\rho \psi_\rho = 0. \quad (1)$$

Considérons, d'autre part, dans l'espace S_r, un système linéaire de dimension ρ, d'hypersurfaces d'ordre n, dont nous écrirons l'équation

$$\lambda_0 \varphi_0 (x_0, x_1, \ldots, x_2) + \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_\rho \varphi_\rho = 0.$$

Nous supposerons que ce système est le plus général possible. En particulier, si $\rho > r$, nous supposerons qu'il est dépourvu de points-base et, si $\rho \leq r$, que les intersections de deux hypersurfaces du système sont irréductibles.

Considérons enfin le système linéaire d'hypersurfaces d'ordre n de S_{r+s+1}, obtenu en combinant les deux systèmes précédents,

$$\lambda_0 (\psi_0 - \varphi_0) + \lambda_1 (\psi_1 - \varphi_1) + \cdots + \lambda_\rho (\psi_\rho - \varphi_\rho) = 0.$$

La base de ce système est une variété algébrique $V_{r+s-\rho}$, à $r + s - \rho$ dimensions. Nous supposerons que cette base est au moins une surface, c'est-à-dire que l'on a $r + s - \rho \geq 2$. Dans ces conditions, on a $\rho + 1 < r + s + 1$ et la variété $V_{r+s-\rho}$ est d'ordre $n^{\rho+1}$.

L'espace S_s ne rencontre pas la variété $V_{r+s-\rho}$; l'espace S_r la rencontre suivant une variété $v_{r-\rho-1}$ d'ordre $n^{\rho+1}$ si $\rho + 1 \leq r$; il ne la rencontre pas si $\rho + 1 > r$.

2. Considérons, dans l'espace S_{r+s+1}, l'homographie H de période n, d'équations

$$\frac{x'_0}{x_0} = \frac{x'_1}{x_1} = \dots = \frac{x'_r}{x_r} = \frac{y'_0}{\varepsilon y_0} = \frac{y'_1}{\varepsilon y_1} = \dots = \frac{y'_s}{\varepsilon y_s},$$

où ε est une racine primitive n- ième de l'unité. Cette homographie possède deux axes ponctuels S_r, S_s et elle transforme en elle-même la variété $V_{r+s-\rho}$. Sur cette variété, elle engendre une involution I_n d'ordre n possédant la variété unie $v_{r-\rho-1}$ si celle-ci existe, dépourvue de points unis dans le cas contraire.

Pour obtenir une image de l'involution I_n, rapportons projectivement les hyperplans de S_{r+s+1} passant par S_s aux hyperplans d'un espace linéaire à r dimensions ou, ce qui est équivalent, projetons la variété $V_{r+s-\rho}$ à partir de S_s sur l'espace S_r. Aux groupes de l'involution I_n correspondent ainsi les points d'une variété $\Omega_{r+s-\rho}$, d'ordre n^ρ, de S_r.

Les équations de $\Omega_{r+s-\rho}$ s'obtiendront en éliminant y_0, $y_1, \dots, y_s$ entre les équations

$$\psi_0 = \varphi_0, \psi_1 = \varphi_1, \dots, \psi_\rho = \varphi_\rho.$$

Cette élimination revient à former les équations de la variété W_s à s dimensions de l'espace à ρ dimensions obtenue en rapportant projectivement aux hyperplans de cet espace les hypersurfaces du système (1) de S_s, puis à remplacer les coordonnées courantes par les polynomes $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_\rho$.

3. Supposons $\rho + 1 > r$. La variété $V_{r+s-\rho}$ ne rencontre pas l'espace S_r et l'involution I_n est privée de points unis.

Désignons par F les sections hyperplanes de la variété $V_{r+s-\rho}$; par F_0 les sections de cette variété par les hyperplans passant par S_s; par F_1 les sections de la variété par les hyperplans passant par S_r. Les systèmes linéaires partiels $|F_0|$, $|F_1|$ sont composés au moyen de l'involution I_n et compris totalement dans le système $|F|$.

A une variété F n'appartenant ni à $|F_0|$, ni à $|F_1|$ correspond sur $\Omega_{r+s-\rho}$ une variété Φ variable dans un système rationnel et par suite comprise totalement dans un système linéaire $|\Phi|$.

Faisons varier la variété F considérée d'une manière continue dans le système $|F|$ en la faisant tendre vers une variété F_0; la variété Φ varie d'une manière continue dans $|\Phi|$ et tend vers la variété Φ_0, homologue de F_0, comptée n fois. On peut répéter le même raisonnement en remplaçant la variété F_0 par une variété F_1. Si nous désignons par Φ_1 les variétés qui, sur $\Omega_{r+s-\rho}$, correspondent aux variétés F_1, nous avons donc

$$|n\Phi_0| = |n\Phi_1|.$$

Les systèmes $|\Phi_0|$, $|\Phi_1|$ ne sont évidemment pas équivalents; leurs multiples d'ordre n le sont.

4. Considérons, sur la variété $V_{r+s-\rho}$, le système linéaire de variétés

$$|G| = |\lambda F|,$$

où λ est un entier positif. Le système $|G|$ est transformé en lui-même par H et comprend un certain nombre t de systèmes linéaires partiels $|G_1|$, $|G_r|$, ..., $|G_t|$ composés au moyen de l'involution I_n. A ces systèmes correspondent sur $\Omega_{r+s-\rho}$ des systèmes linéaires de variétés $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$, ..., $|\Gamma_t|$, non équivalents deux-à-deux et qui sont des combinaisons linéaires des systèmes $|\Phi_0|$, $|\Phi_1|$.

Remarquons que les systèmes

$$|n\Phi_0|, \ |(n-1)\Phi_0+\Phi_1|, ..., |(n-i)\Phi_0+i\Phi_1|, ..., |\Phi_0+(n-1)\Phi_1|$$

ne sont pas deux-à-deux équivalents et ont pour homologues, sur $V_{r+s-\rho}$, des systèmes linéaires appartenant au système $|nF|$. Par conséquent, si l'on prend $\lambda \geq n$, on a $t = n$.

Par un raisonnement analogue à celui qui a été fait plus haut, on voit que l'on a

$$|n\Gamma_1| = |n\Gamma_2| = \cdots = |n\Gamma_n|,$$

les systèmes $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$, ..., $|\Gamma_n|$ n'étant pas deux-à-deux équivalents.

La variété $V_{r+s-\rho}$ étant l'intersection complète de $\rho + 1$ hypersurfaces, ne contiendra pas en général de variétés qui ne soient intersections complètes de la variété et d'une hypersurface ([1]); par conséquent le diviseur de cette variété est en général égal à l'unité et tout système complet de variétés à $r + s - \rho - 1$ dimensions tracées sur la variété $V_{r+s-\rho}$ sera en général linéaire. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si, dans les équations de la variété de l'espace linéaire à ρ *dimensions obtenue en rapportant projectivement aux hyperplans de cet espace les hypersurfaces d'ordre* n *d'un espace à* $s < \rho$ *dimensions, formant un système linéaire de dimension* ρ, *simple et dépourvu de points-base, on remplace les coordonnées courantes par des formes algébriques de degré* n *à* r *variables, linéairement indépendantes et sans solution commune* $(s < r < \rho + 1 \leq r + s - 1)$, *on obtient dans l'espace à* r *dimensions dont ces variables sont les coordonnées ponctuelles, les équations d'une variété algébrique à* $r + s - \rho \geq 2$ *dimensions, d'ordre* n^{ρ}, *dont le diviseur* σ *est en général égal à* n.

Remarquons d'ailleurs que si la variété $V_{r+s-\rho}$ était de diviseur $\sigma > 1$, le diviseur de la variété $\Omega_{r+s-\rho}$ serait multiple de σ.

5. Appliquons ce qui précède à quelques cas où la variété $V_{r+s-\rho}$ est une surface. On a

$$r + s - \rho = 2.$$

Supposons tout d'abord $n = 2$, $r = \rho = 3$, $s = 2$. On obtient l'énoncé suivant ([2]) :

Si dans l'équation d'une surface de Steiner, on remplace les

([1]) Voir G. Fano, Sulle varieta algebriche che sono intersezioni completi di più forme (*Atti della R. Accad. di Torino*, 1908-1909, t. 44).

([2]) Voir notre note *Sur une surface algébrique du huitième ordre* (*The Tôhoku Mathematical Journal*, 1933, pp. 122-123).

coordonnées courantes par les formes quadratiques à quatre variables linéairement indépendantes et sans solution commune, on obtient une surface de diviseur deux.

Supposons encore $n = 2$, ρ ayant sa valeur maximum, c'est-à-dire

$$\rho = \frac{1}{2} s (s + 3).$$

Nous avons $r = \frac{1}{2} s (s + 1) + 2$ et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Si nous exprimons que le déterminant symétrique

$$|\, \varphi_{ik} (x_0, x_1, \ldots, x_r) \,|, \qquad \left[i, k = 0, 1, \ldots, \frac{1}{2} s (s + 3) \right]$$

est de caractéristique un, les éléments étant des formes quadratiques linéairement indépendantes, sans solution commune, par rapport à $r = \frac{1}{2} s (s + 1) + 2$ *variables* $x_0, x_1, \ldots, x_r$, *nous obtenons, dans l'espace* S_r, *les équations d'une surface de diviseur deux* [1].

Prenons maintenant $s = 2$, $n = 3$, $\rho = 9$, d'où $r = 9$.

Si l'on exprime que la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_{000} & \varphi_{110} & \varphi_{220} & \varphi_{012} & \varphi_{002} & \varphi_{001} \\ \varphi_{001} & \varphi_{111} & \varphi_{221} & \varphi_{112} & \varphi_{012} & \varphi_{110} \\ \varphi_{002} & \varphi_{112} & \varphi_{222} & \varphi_{221} & \varphi_{220} & \varphi_{012} \end{matrix} \right\|$$

est de caractéristique un, les éléments étant des formes cubiques en $x_0, x_1, \ldots, x_\rho$, *linéairement indépendantes et sans solution commune, on obtient les équations d'une surface de l'espace* S_ρ, *de diviseur trois.*

Liége, le 16 janvier 1938.

---

(1) Dans le cas $s=2$, $r=5$, $\rho=5$, nous retrouvons un théorème que nous avons établi récemment : Sur une surface algébrique de diviseur deux déduite de la surface de Veronese (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, Cl. d. Sc., 1937, pp. 830-833).

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.