EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*,
Nos 6-7, 1934.

Remarques sur une suite de quadriques associée à un point d'une surface,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Nous avons introduit, dans un travail antérieur (1), une suite de quadriques attachée en chaque point d'une surface; la première quadrique de la suite est la quadrique de Lie et deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points, caractéristiques pour chacune de ces quadriques. Désignons les quadriques de la suite par Φ, Φ_1, Φ_2, ... et considérons, en chaque point de la surface, le tétraèdre ayant pour sommets les points de rencontre de la quadrique de Lie Φ avec les directrices de Wilczynski. Nous nous sommes proposé de former les équations des quadriques de la suite rapportées à ce tétraèdre. L'équation de la quadrique de Lie Φ est connue; nous avons déjà donné celle de la quadrique Φ_1. Nous indiquons la formation de l'équation de la quadrique Φ_n et appliquons nos résultats à la quadrique Φ_2. Notre but primitif était de trouver une loi de formation des équations des quadriques $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$; l'extrême complication des équations nous a forcé à renoncer à notre projet.

Pour éviter d'allonger outre mesure ce travail, nous renvoyons, pour les notations et les formules utilisées, à l'exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé*, qui vient de paraître dans la collection d'exposés sur l'analyse mathématique et ses applications, publiés sous la direction de M. J. Hadamard (2).

1. Soit (x) une surface de l'espace ordinaire S_3, rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives de Wilczynski satisfont au système complètement intégrable

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1x = 0, \qquad x^{02} + 2ax^{10} + c_2x = 0. \tag{1}$$

Considérons l'hyperquadrique $\underset{\sim}{Q}$ d'un espace S_5 représentant les droites de S_3 et soient

$$U = | x \quad x^{10} |, \qquad V = | x \quad x^{01} |$$

les points de $\underset{\sim}{Q}$ représentant les tangentes aux asymptotiques u, v de la surface (x) au point x.

(1) Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1927, pp. 812-826; 1928, pp. 31-51.)

(2) Paris, Hermann, 1934.

Les points U, V appartiennent à une suite de Laplace L, que nous représentons par

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_m, \ldots, \qquad \text{(L)}$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u.

Les plans $U_n U_{n+1} U_{n+2}$, $V_n V_{n+1} V_{n+2}$ sont conjugués par rapport à Q et les sections de cette hyperquadrique par ces plans représentent les génératrices des deux modes d'une même quadrique Φ_n. En particulier, les plans $U U_1 U_2$, $V V_1 V_2$ représentent la quadrique de Lie Φ; les plans $V U U_1$, $U V V_1$ représentent une quadrique formée du plan tangent à la surface (x) compté deux fois.

Deux quadriques consécutives de la suite Φ, Φ_1, ... se touchent en quatre points, caractéristiques pour chacune de ces quadriques.

2. Supposons que l'on ait

$$\left.\begin{aligned} U_n &= B_2U_2 + B_1U_1 + BU + AV + A_1V_1 + A_2V_2; \\ U_{n+1} &= B_2'U_2 + B_1'U_1 + B'U + A'V + A_1'V_1 + A_2'V_2; \\ U_{n+2} &= B_2''U_2 + B_1''U_1 + B''U + A''V + A_1''V_1 + A_2''V_2, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ce qui est toujours possible, les points U_2, ... V_2 ne pouvant appartenir à un même hyperplan.

Observons, d'autre part, que les coordonnées d'un point quelconque de S_3 peuvent s'écrire sous la forme

$$z_1 x + z_2 m + z_3 n + z_4 y,$$

où

$$m = x(\log a)^{10} - 2x^{10}, \qquad n = x(\log b)^{01} - 2x^{01},$$
$$y = [8ab - (\log a)^{10}(\log b)^{01}]\,x + 2x^{10}(\log b + 2x^{01}(\log a)^{10} - 4x^{11};$$

les z sont les coordonnées locales de ce point.

Un point du plan $U_n U_{n+1} U_{n+2}$ peut se mettre sous la forme

$$\lambda_n U_n + \lambda_{n+1} U_{n+1} + \lambda_{n+2} U_{n+2},$$

ou encore, moyennant les formules (2), sous la forme

$$\eta_2 U_2 + \eta_1 U_1 + \eta U + \xi V + \xi_1 V_1 + \xi_2 V_2,$$

en posant

$$\eta_2 = B_2 \lambda_n + B_2' \lambda_{n+1} + B_2'' \lambda_{n+2}, \ldots.$$

Si le point considéré appartient à l'hyperquadrique Q, il représente une droite commune aux trois plans

$$\left.\begin{aligned} &\eta_2[z_3(\log bh_1)^{01}-z_1]-\eta_1 z_3+2\xi z_4-\xi_1 z_3+\xi_2[z_3(\log ak_1)^{10}-\alpha z_4]=0,\\ &\eta_2[z_2(\log bh_1)^{01}-\beta z_4]-\eta_1 z_2+2\eta z_4-\xi_1 z_2+\xi_2[z_2(\log ak_1)^{10}-z_1]=0,\\ &\eta_2[z_4(\log bh_1)^{01}+z_2]-\eta_1 z_4+\xi_1 z_4-\xi_2[z_4(\log ak_1)^{10}+z_3]=0, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

où l'on a posé

$$\begin{gathered} h_1=-(\log b)^{11}+4ab, \qquad k_1=-(\log a)^{11}+4ab,\\ \alpha=2(\log a)^{20}+\overline{(\log a)^{10}}^2+4(b^{01}+c_1),\\ \beta=2(\log b)^{02}+\overline{(\log b)^{01}}^2+4(a^{10}+c_2). \end{gathered}$$

L'équation de la quadrique Φ_n s'obtiendra en éliminant les λ entre les équations (3), après suppression du facteur commun z_4. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} &2(z_1z_4+z_2z_3)[-|B_2B_1B|-|B_2BA_1|+|B_2BA_2|(\log ak_1)^{10}\\ &\qquad\qquad -|B_2AA_2|(\log bh_1)^{01}+|B_1AA_2|+|AA_1A_2|]\\ &+(z_1^2+\alpha z_2^2+\beta z_3^2+\alpha\beta z_4^2)[|B_2B_1A_2|-|B_2A_1A_2|]\\ &+2(z_2^2+\beta z_4^2)[|B_2B_1A|-\alpha|B_2B_1A_2|+|B_2AA_1|+|B_2AA_2|(\log ak_1)^{10}]\\ &+2(z_3^2+\alpha z_4^2)[-|B_2BA_2|(\log bh_1)^{01}+\beta|B_2A_1A_2|-|B_1BA_2|-|BA_1A_2|]\\ &+2(z_1z_2-\beta z_3z_4)[|B_2B_1A_1|-|B_2B_1A_2|(\log ak_1)^{10}-|B_2AA_2|]\\ &+2(z_1z_3-\alpha z_2z_4)[|B_2BA_2|-|B_2AA_1|+|B_2A_1A_2|(\log bh_1)^{01}-|B_1A_1A_2|]\\ &+4[z_2+z_4(\log bh_1)^{01}][-|B_2BA|z_4+|B_2BA_1|z_3\\ &\qquad\qquad -|B_2BA_2|\{z_3(\log ak_1)^{10}-\alpha z_4\}-|B_2AA_1|z_2]\\ &+4[z_3+z_4(\log ak_1)^{10}][|BAA_2|z_4+|B_1BA_2|z_3-|B_1AA_2|z_2\\ &\qquad\qquad +|B_2AA_2|\{z_2(\log bh_1)^{01}-\beta z_4\}]\\ &+4z_4^2[|B_1BA|z_4+|B_1AA_1|z_2-|BAA_1|z_4-|B_1BA_1|z_3]=0, \end{aligned}$$

où $|B_2B_1B|$, ... représentent des déterminants dont les deux autres lignes se déduisent de la première en accentuant une et deux fois les lettres.

Observons que l'on doit, d'autre part, parvenir à la même équation en partant des expressions de V_n, V_{n+1}, V_{n+2} en fonction de U_2, ... V_2.

3. Pour $n=0$, l'équation précédente se réduit à celle de la quadrique de Lie :

$$\Phi\equiv z_1z_4+z_2z_3=0.$$

Pour $n = 1$, on obtient la quadrique Φ_1 en utilisant la relation

$$\left.\begin{aligned} &2U_3 + 2U_2 (\log b^3 h_1^2 h_2)^{01} + 2\beta_1 U_1 + \beta (\log b^2\beta)^{01}\, U \\ &\qquad + 4a[\alpha V + V_1 (\log a k_1)^{10} + V_2] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

L'équation ainsi obtenue s'écrit

$$\Phi_1 \equiv z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2 - \frac{\beta (\log b^2\beta)^{01}}{2a} \Phi = 0.$$

En partant du plan $V_1V_2V_3$, au lieu de partir du plan $U_1U_2U_3$, on parviendrait à la même équation, en vertu de la relation

$$a\alpha^{10} + 2\alpha a^{10} = b\beta^{01} + 2\beta^{01},$$

conséquence des conditions d'intégrabilité des équations (1).

4. Considérons maintenant le cas $n = 2$ et observons qu'en posant

$$\alpha_1 = \alpha + (\log a k_1)^{20} + (\log a k_1)^{10} (\log a^2 k_1)^{10},$$
$$\beta_1 = \beta + (\log b h_1)^{02} + (\log b h_1)^{01} (\log b^2 h_1)^{01}$$

on a

$$\left.\begin{aligned} &[a\alpha^{10} + 2\alpha a^{10}]^{10} = -2bh_1\beta_1 + 8ab^2\beta + [b\beta^{01} + 2\beta b^{01}] (\log b)^{10}, \\ &[b\beta^{01} + 2\beta b^{01}]^{01} = -2ak_1\alpha_1 + 8a^2b\alpha + [a\alpha^{10} + 2\alpha a^{10}] (\log a)^{01}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

On trouve ensuite aisément l'expression de U_4 en fonction de $U_2, \ldots V_2$ en dérivant l'équation (1) par rapport à v [1]. L'équation de la quadrique Φ_2 s'écrit

$$\begin{aligned} &\left[2\beta_1^{01} + 2\beta_1 \left(\log \frac{b h_1}{a}\right)^{01} + \beta (\log b^2\beta)^{01} - 4a k_1\right] \Phi_1 \\ &+ \left[\frac{k_1\alpha_1\beta_1}{b} + 4a k_1 (\log a k_1)^{10} (\log b h_1)^{01}\right] \Phi \\ &+ 4k_1\beta_1 (\log a k_1)^{10} (z_2^2 + \beta z_4^2) + \left[\frac{a k_1}{b} \alpha_1 (\log b h_1)^{01} + 8 a k_1 \beta\right] (z_3^2 + \alpha z_4^2) \\ &- 4k_1 [\beta_1 + 2a (\log a k_1)^{10}] (z_1 z_2 - \beta z_3 z_4) \\ &- 4a k_1 \left[\frac{\alpha_1}{b} - 2\alpha - 2\overline{(\log a k_1)^{10}}^2 - 2 (\log b h_1)^{01}\right] (z_1 z_3 - \alpha z_2 z_4) \\ &+ 4k_1 [4a \{\alpha - \overline{(\log a k_1)^{10}}^2\} z_2 - a\beta (\log b^2\beta)^{01} z_3 \\ &\qquad\qquad + \beta (\log a k_1)^{10} z_4] [z_2 + z_4 (\log b h_1)^{01}] \\ &- 16 a k_1 (\log a k_1)^{10} [z_3 + z_4 (\log a k_1)^{10}] [z_2 (\log b h_1)^{01} - \beta z_4] = 0. \end{aligned}$$

---

(1) Voir notre note « Sur la suite de Laplace de l'espace réglé associé à une surface ». (*Bull. de la Soc. roy. des Sc. de Liége*, 1934, pp. 64-67.)

En partant du plan $V_2V_3V_4$ on obtiendra une expression analogue pour l'équation Φ_2 et l'on pourra passer de l'une à l'autre au moyen de la relation

$$\begin{aligned} ak_1 &\left[2\alpha_1^{10} + 2\alpha_1\left(\log\frac{ak_1}{b}\right)^{10} + \alpha\,(\log a^2\alpha)^{10}\right] \\ = bh_1 &\left[2\beta_1^{01} + 2\beta_1\left(\log\frac{bh_1}{a}\right)^{01} + \beta\,(\log b^2\beta)^{01}\right]. \end{aligned}$$

Liége, le 4 juin 1934.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles.