

**Sur les involutions cycliques
appartenant à une variété algébrique de genres un**

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Dans le but de construire des variétés algébriques à trois dimensions sur lesquelles l'opération d'adjonction est périodique, nous avons entrepris récemment l'étude des involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une variété algébrique à trois dimensions, complètement régulière, de genres un, c'est-à-dire possédant des surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro. Sur une telle variété, tout système linéaire de surfaces est son propre adjoint.

Considérons une variété algébrique Ω à trois dimensions et soient $|\Phi|$ un système linéaire de surfaces tracées sur Ω , $|\Phi'|$ son adjoint, $|\Phi''|$ son biadjoint, ... Si, sur la variété Ω , l'opération d'adjonction a la période p , le p -ième adjoint $|\Phi^{(p)}|$ de $|\Phi|$ coïncide avec $|\Phi|$, les adjoints précédents étant distincts de $|\Phi|$. Une telle variété Ω peut s'obtenir comme image d'une involution cyclique d'ordre p appartenant à une variété algébrique V , à trois dimensions, de genres un, involution n'ayant qu'un nombre fini de points unis. En partant de cette remarque, suggérée d'ailleurs par le problème analogue relatif aux surfaces, nous avons pu construire des variétés Ω sur

lesquelles l'opération d'adjonction a la période deux ⁽¹⁾ ou la période trois ⁽²⁾. Nous avons ensuite étudié le cas où p est premier et supérieur à trois ⁽³⁾; nous avons précisément supposé que dans la gerbe des tangentes à la variété V en un point uni de l'involution I_p , dont Ω est l'image, cette involution détermine une homologie (de période p) et nous avons déterminé la structure de ce point uni pour que, sur la variété Ω , l'opération d'adjonction ait la période un ou p .

Il importe maintenant de montrer que les variétés Ω rencontrées existent effectivement, en en construisant des exemples. Dans cette note, nous nous proposons précisément de construire une variété Ω sur laquelle l'opération d'adjonction a la période cinq. Nous considérons une variété V_3^5 d'ordre cinq, appartenant à un espace linéaire S_4 à quatre dimensions, invariante pour une homographie H , de période cinq, ayant comme axes ponctuels deux droites et un point. Deux cas peuvent se présenter et l'opération d'adjonction sur la variété Ω , image de l'involution engendrée par H sur V_3^5 , a dans un cas la période un, dans l'autre la période cinq. Nous reviendrons d'ailleurs ultérieurement sur l'étude de ces variétés; pour l'instant, nous nous bornerons à signaler leur existence, en établissant la propriété en question.

(1) Sur les involutions du second ordre appartenant à certaines variétés algébriques à trois dimensions (*C. R.*, 9 déc. 1935, pp. 1169-1170); Sur une variété algébrique à trois dimensions de bigenre un (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1937, pp. 93-101); Remarques sur les variétés algébriques de bigenre un (*Idem*, pp. 000-000).

(2) Recherches sur les involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions (*Annales de l'Ecole normale supérieure*, 1937, pp. 55-79); Sur deux involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions (*Bull. des Sciences mathématiques*, 1937, pp. 82-96); Une variété algébrique à trois dimensions sur laquelle l'opération d'adjonction a la période trois (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1937, pp. 335-342).

(3) Sur les variétés algébriques à trois dimensions, de genres un, contenant des involutions cycliques (paraîtra dans le *Bulletin de la Soc. math. de France*).

1. Considérons dans un espace S_4 une hypersurface V_3^5 , d'ordre cinq. On sait que tout système linéaire de surfaces tracées sur V_3^5 est son propre adjoint et que par conséquent cette hypersurface possède des surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro; son genre géométrique, son genre arithmétique et ses plurigenres sont égaux à l'unité ($P_a = P_g = P_2 = \dots = P_n = \dots = 1$).

Considérons, d'autre part, l'homographie H d'équations

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_0 : x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 : \varepsilon^4 x_4, \quad (H)$$

où ε est une racine primitive cinquième de l'unité et où α a l'une des valeurs 2, 3, 4.

L'homographie H a la période cinq et possède comme axes ponctuels :

- 1° la droite $O_0 O_1 (x_2 = x_3 = x_4 = 0)$,
- 2° la droite $O_2 O_3 (x_0 = x_1 = x_4 = 0)$,
- 3° le point $O_4 (x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0)$.

Nous supposons que l'hypersurface V_3^5 est transformée en elle-même par H et ne contient pas les axes de cette homographie. Dans ces conditions, les genres et plurigenres de V_3^5 conservent les mêmes valeurs ($P_g = P_a = P_2 = \dots = 1$).

L'homographie H détermine, sur V_3^5 , une involution I_5 dont nous désignerons par Ω une variété image. L'involution I_5 possède dix points unis; cinq, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 situés sur l'axe $O_0 O_1$ et cinq, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 , situés sur la droite $O_2 O_3$.

Nous utiliserons les notations suivantes :

$\alpha_n(x_0, x_1)$ représentera un polynôme de degré n en x_0, x_1 ; $\beta_n(x_2, x_3)$ un polynôme de degré n en x_2, x_3 ; le produit symbolique $\alpha_n(x_0, x_1) \beta_m(x_2, x_3)$ un polynôme de degré n en x_0, x_1 et de degré m en x_2, x_3 .

$\varphi_n(x_0, x_1)$ représentera un polynôme à coefficients variables de degré n en x_0, x_1 ; $\psi_n(x_2, x_3)$ un polynôme à coefficients variables de degré n en x_2, x_3 ; le produit symbolique $\varphi_n(x_0, x_1) \psi_m(x_2, x_3)$ un polynôme à coefficients variables de degré n en x_0, x_1 , de degré m en x_2, x_3 .

2. Supposons en premier lieu $\alpha=3$. L'équation de V_3^5 s'écrit

$$a_0 x_4^5 + x_4^3 \alpha_1(x_0, x_1) \beta_1(x_2, x_3) + x_4 \alpha_2(x_0, x_1) \beta_2(x_2, x_3) + \alpha_5(x_0, x_1) + \beta_5(x_2, x_3) = 0.$$

Désignons par $|F|$ le système linéaire découpé sur V_3^5 par les autres hypersurfaces du même ordre. Dans ce système, il y a cinq systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_5 ; ils sont respectivement découpés sur V_3^5 par les hypersurfaces des systèmes linéaires

$$\lambda_0 x_4^5 + x_4^3 \varphi_1 \psi_1 + x_4 \varphi_2 \psi_2 + \varphi_5 + \psi_5 = 0, \quad (1)$$

$$x_4^4 \varphi_1 + x_4^2 \varphi_2 \psi_1 + x_4 \psi_4 + \varphi_3 \psi_2 = 0, \quad (2)$$

$$x_4^4 \psi_1 + x_4^2 \varphi_1 \psi_2 + x_4 \varphi_4 + \varphi_2 \psi_3 = 0, \quad (3)$$

$$x_4^3 \varphi_2 + x_4^2 \psi_3 + x_4 \varphi_3 \psi_1 + \varphi_1 \psi_4 = 0, \quad (4)$$

$$x_4^3 \psi_2 + x_4^2 \varphi_3 + x_4 \varphi_1 \psi_3 + \varphi_4 \psi_1 = 0. \quad (5)$$

Soient $|F_1|$, $|F_2|$, $|F_3|$, $|F_4|$, $|F_5|$ les systèmes linéaires de surfaces découpées sur V_3^5 respectivement par les variétés (1), (2), ..., (5). On observera que le système (1) contient l'hypersurface V_3^5 , par conséquent les cinq systèmes considérés $|F_1|$, ..., $|F_5|$ ont la même dimension vingt-quatre.

Désignons par $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, $|\Phi_3|$, $|\Phi_4|$, $|\Phi_5|$ les systèmes linéaires (complets) de surfaces qui correspondent sur Ω aux systèmes $|F_1|$, ..., $|F_5|$.

Considérons une surface F_1 et la surface homologue Φ_1 . La surface F_1 ne passe pas en général par les points unis de I_5 et les groupes de cette involution appartenant à la surface forment donc sur celle-ci une involution privée de points unis. Il en résulte que le système canonique de la surface Φ_1 a pour transformé sur la surface F_1 celui des systèmes partiels composés au moyen de l'involution, compris dans le système canonique, qui a la dimension minimum ⁽¹⁾. Comme le système $|F|$ est son propre

⁽¹⁾ Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis, appartenant à une surface algébrique régulière (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1932, pp. 672-679).

adjoint, le système $[\Phi_1]$ est également son propre adjoint. Sur la variété Ω , dans le cas étudié ici, l'opération d'adjonction a donc la période un; c'est une variété de genres un ($P_g = P_a = P_2 = \dots = 1$).

3. Supposons maintenant $\alpha=4$. La variété V_3^5 a pour équation

$$\alpha_0 x_4^5 + x_4^2 \alpha_1 \beta_2 + x_4 \alpha_3 \beta_1 + \alpha_5 + \beta_5 = 0.$$

Conservons les mêmes notations que plus haut pour les surfaces découpées sur V_3^5 par les hypersurfaces du cinquième ordre. Le système $[F]$ contient cinq systèmes linéaires $[F_1]$, ..., $[F_5]$, composés au moyen de l'involution I_5 , découpés sur V_3^5 respectivement par les hypersurfaces

$$\begin{aligned} \lambda_0 x_4^5 + x_4^2 \varphi_1 \psi_2 + x_4 \varphi_3 \psi_1 + \varphi_5 + \psi_5 &= 0, \\ x_4^4 \varphi_1 + x_4^2 \psi_3 + x_4 \varphi_2 \psi_2 + \varphi_4 \psi_1 &= 0, \\ x_4^4 \psi_1 + x_4^3 \varphi_2 + x_4 \varphi_1 \psi_3 + \varphi_3 \psi_2 &= 0, \\ x_4^3 \varphi_1 \psi_1 + x_4^2 \varphi_3 + x_4 \psi_4 + \varphi_2 \psi_3 &= 0, \\ x_4^3 \psi_2 + x_4^2 \varphi_2 \psi_1 + x_4 \varphi_4 + \varphi_1 \psi_4 &= 0. \end{aligned}$$

Le système $[F_1]$ a la dimension 25, les systèmes $[F_2]$, $[F_3]$, $[F_4]$ la dimension 24 et le système $[F_5]$ la dimension 23.

Si nous appliquons dans le cas actuel le raisonnement fait dans le cas précédent, nous voyons que l'adjoint du système $[\Phi_1]$ est le système $[\Phi_5]$.

L'adjoint d'un des systèmes $[\Phi_1]$, ..., $[\Phi_5]$ est l'un de ces systèmes. Aucun de ces systèmes ne peut coïncider avec son adjoint, son biadjoint, son triadjoint ou avec son 4-adjoint; il coïncide nécessairement avec son 5-adjoint. Par conséquent :

Il existe des variétés algébriques à trois dimensions sur lesquelles l'opération d'adjonction a la période cinq.

Il nous reste à examiner le cas $\alpha=2$; ce cas se ramène, par un changement de notation, au cas qui vient d'être étudié.

Liège, le 21 juin 1937.