Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 2 juin 1934, n° 6.

Sur une suite de surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Nous avons étudié à plusieurs reprises les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques [1]. En particulier, nous avons montré que si les quadriques de Lie d'une surface (x) n'ont que trois points caractéristiques x, x_1, x_{-1}, les quadriques de Lie de chacune des surfaces (x_1), (x_{-1}) n'ont que trois points caractéristiques parmi lesquels le point x. Il résulte de cette propriété que toute surface dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques appartient à une suite de surfaces présentant la même propriété. Nous établissons quelques propriétés de cette suite. Le procédé utilisé consiste dans l'emploi systématique de la représentation des surfaces, considérées comme complexes de tangentes, dans l'espace réglé. Nous renvoyons une fois pour toutes à l'exposé de cette théorie que nous avons écrit récemment [2].

[1] Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques (*Bull. de la Soc. math. de France*, 1929, pp. 26-41); Sur les quadriques de Lie de certaines surfaces (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, Cl. des Sc., 1929, pp. 943-958); Sur quelques relations concernant les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques (*Bull. de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1933, pp. 74-78). Les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques ont été considérées en premier lieu par M. DEMOULIN dans sa note « Sur la quadrique de Lie » (*C. R.*, sept. 1908).

[2] *La Théorie des Surfaces et l'Espace réglé* (Exposés sur l'Analyse mathématique et ses applications. publiés sous la direction de M. J. HADAMARD). Paris, Hermann, 1934.

1. Soit (x) une surface non réglée, rapportée à ses asymptotiques u, v, dont les quadriques de Lie Φ n'ont que trois points caractéristiques. L'un de ces points est x; soient x_1 et x_{-1} les autres. Les asymptotiques des surfaces (x_1), (x_{-1}) sont les courbes u, v et la droite $x_1 x_{-1}$ engendre une congruence W. La quadrique Φ_1, qui fait suite à la quadrique Φ dans la suite de quadriques que nous avons attachée au point x de la surface (x), est dégénérée et formée des deux plans tangents en x_1, x_{-1} aux surfaces engendrées par ces points.

Nous avons prouvé que les quadriques de Lie $\Phi^{(1)}$ de la surface (x_1) n'ont que trois points caractéristiques dont l'un est le point x ; soit x_2 le point qui, avec x_1, complète le groupe de points caractéristiques. Les asymptotiques de la surface (x_2) sont les courbes u, v et la droite xx_2 engendre une congruence W. Les points caractéristiques des quadriques de Lie attachées à la surface (x_2) sont les points x_2, x_1 et un troisième point x_3, et ainsi de suite.

De même, en partant des quadriques de Lie de la surface (x_{-1}), on obtiendra des points x_{-2}, x_{-3}, ... On a donc ainsi une suite de points illimitée (en général) dans les deux sens.

2. Désignons par Q l'hyperquadrique d'un espace linéaire S_5, à cinq dimensions, dont les points représentent, au sens de Klein, les droites de l'espace ordinaire. Soient $U^{(i)}$, $V^{(i)}$ les points de Q qui représentant les tangentes aux asymptotiques u, v en un point x_i de la surface (x_i). Comme on sait (Tzitzeica, Bompiani), ces points sont consécutifs dans une suite de Laplace que nous désignerons par L_i et dont nous représenterons les points successifs par

$$\ldots, U_n^{(i)}, \ldots, U_1^{(i)}, U^{(i)}, V^{(i)}, V_1^{(i)}, \ldots, V_m^{(i)}, \ldots, \qquad (L_i)$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u. La droite $U^{(i)}V^{(i)}$ appartient tout entière à l'hyperquadrique Q et représente le faisceau des tangentes à la surface (x_i) au point x_i. Les points $U_1^{(i)}$, $V_1^{(i)}$ ne peuvent appartenir à Q.

quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques.

Dans le cas actuel, les quadriques de Lie de la surface (x_i), qui sont représentées dans S_5 par les couples de plans $U^{(i)} U_1^{(i)} U_2^{(i)}$ et $V^{(i)} V_1^{(i)} V_2^{(i)}$, conjugués par rapport à Q, n'ayant que trois points caractéristiques, l'un des points $U_2^{(i)}$, $V_2^{(i)}$, et un seul, appartient à Q.

Envisageons la suite de Laplace (L) associée à la surface (x) et supposons, pour fixer les idées, que le point U_2 appartienne à Q. Alors, la droite $V_1 V_2$ coupe Q en deux points distincts $U^{(1)}$, $U^{(-1)}$ et la droite $V_2 V_3$ aux deux points $V^{(1)}$, $V^{(-1)}$. Les droites $U^{(1)} V^{(1)}$ et $U^{(-1)} V^{(-1)}$ passent par le point U_2 et les suites L_1, L_{-1} sont à la fois inscrites et circonscrites à la suite L.

Le point $U_1^{(1)}$ appartient à la droite $V V_1$ et le point $U_2^{(1)}$ à la droite UV. La droite $U_1^{(1)} U_2^{(1)}$ touche l'hyperquadrique Q au point $U_2^{(1)}$. La droite $V^{(1)} V_1^{(1)}$ passe par U_1 et la droite $V_1^{(1)} V_2^{(1)}$ par le point U. Cette dernière droite rencontre en outre l'hyperquadrique Q au point $U^{(2)}$. La droite $V_2^{(1)} V_3^{(1)}$ passe par V et coupe encore Q en un point $V^{(2)}$ qui appartient à la droite $U^{(2)} U_2^{(1)}$. Et ainsi de suite. La suite L_2 est à la fois inscrite et circonscrite à la suite L_1.

De même, la suite L_{-2} est à la fois inscrite et circonscrite à la note L_{-1}. D'une manière générale, la suite L_i est à la fois inscrite et circonscrite aux suites L_{i-1} et L_{i+1}.

3. La quadrique de Lie Φ attachée au point x de la surface (x) est représentée dans S_5 par les plans $U U_1 U_2$, $V V_1 V_2$. La quadrique Φ_1 est représentée par les plans $U_1 U_2 U_3$ et $V_1 V_2 V_3$; elle dégénère en deux plans : les plans focaux de la congruence $(x_1 x_{-1})$ relatifs à la droite $x_1 x_{-1}$, c'est-à-dire les plans tangents aux surfaces (x_1), (x_{-1}) aux points x_1, x_{-1}. La quadrique Φ_2 est représentée par les plans $U_2 U_3 U_4$ et $V_2 V_3 V_4$; elle est irréductible. La quadrique Φ_3 est représentée par les plans $U_3 U_4 U_5$ et $V_3 V_4 V_5$; ce dernier contient le point U et la quadrique Φ_3 contient la tangente à l'asymptotique u au point x de la surface (x).

La quadrique de Lie $\Phi^{(1)}$ de la surface (x_1) est représentée par les plans $U^{(1)}U_1^{(1)}U_2^{(1)}$ et $V^{(1)}V_1^{(1)}V_2^{(1)}$. Les VV_1V_2 et $U^{(1)}U_1^{(1)}U_2^{(1)}$ se coupent suivant la droite $U^{(1)}U_1^{(1)}$, tangente en $U^{(1)}$ à l'hyperquadrique Q. Par conséquent, les quadriques Φ, $\Phi^{(1)}$ se raccordent le long de la tangente à l'asymptotique u de la surface (x_1) en x_1. De même, ces quadriques se raccordent le long de la tangente à l'asymptotique u de la surface (x) au point x.

Si les quadriques de Lie d'une surface (x) *n'ont que trois points caractéristiques et si* x_1 *est un de ces points distinct de* x, *la quadrique de Lie relative à un point* x *et la quadrique de Lie relative au point correspondant* x_1 *se raccordent suivant deux tangentes asymptotiques correspondantes des deux surfaces.*

4. On peut retrouver ce résultat par le calcul. Supposons que les coordonnées projectives homogènes d'un point x de la surface (x) soient les coordonnées normales de Wilczynski; elles satisfont au système complètement intégrable

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1x = 0, \qquad x^{02} + 2ax^{10} + c_2x = 0.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les quadriques de Lie de la surface (x) n'aient que trois points caractéristiques sont [1]

$$\alpha = 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^2 + 4(b^{01} + c_1) \neq 0,$$
$$\beta = 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_2) = 0.$$

On a, en outre, comme conséquence

$$(\log bh_1)^{01} = 0, \qquad h_1 = -(\log b)^{11} + 4ab.$$

En posant

$$m = x(\log a)^{10} - 2x^{10}, \qquad n = x(\log b)^{01} - 2x^{01},$$
$$y = [8ab - (\log a)^{10}(\log b)^{01}]x + 2x^{10}(\log b)^{01} + 2x^{01}(\log a)^{10} - 4x^{11},$$

[1] Nous tenons compte, en écrivant ces conditions, que c'est le point U_2 qui appartient à Q. Si, au contraire, V_2 appartenait à Q, U_2 n'appartenant pas à cette hyperquadrique, on aurait $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$.

quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques.

---

tout point de l'espace peut être représenté par

$$z_1 x + z_2 m + z_3 n + z_4 y$$

et z_1, z_2, z_3, z_4, sont les coordonnées locales de ce point.

Tout point de l'espace S_5 peut être représenté par

$$G = \eta_2 U_2 + \eta_1 U_1 + \eta_0 U + \xi_0 V + \xi_1 V_1 + \xi_2 V_2$$

et si l'on représente par

$$\Omega(p, q) = 0$$

la condition pour que deux points p, q soient conjugués par rapport à Q, la condition pour que G appartienne à Q se traduit par (¹)

$$\beta\eta_2^2 + [\eta_1 - \eta_2(\log bh_1)^{01}]^2 - 2\eta_0\eta_2 - \alpha\xi_2^2 - [\xi_1 - \xi_2(\log ak_1)^{10}]^2 + 2\xi_0\xi_2 = 0.$$

La droite représentée dans ces conditions par ce point est commune aux quatre plans

$$\begin{aligned}
&\eta_2[z_1(\log bh_1)^{01} + \beta z_2] - \eta_1 z_1 - 2\eta_0 z_3 + 2\xi_0 z_2 + \xi_1 z_1 \\
&\qquad\qquad - \xi_2[z_1(\log ak_1)^{10} + \alpha z_2] = 0, \\
&\eta_2[z_3(\log bh_1)^{01} - z_1] - \eta_1 z_3 + 2\xi_0 z_4 - \xi_1 z_3 + \xi_2[z_3(\log ak_1)^{10} - \alpha z_4] = 0, \\
&\eta_2[z_2(\log bh_1)^{01} - \beta z_4] - \eta_1 z_2 + 2\eta_0 z_4 - \xi_1 z_2 + \xi_2[z_2(\log ak_1)^{10} - z_1] = 0, \\
&\eta_2[z_2 + z_4(\log bh_1)^{01}] - \eta_1 z_4 + \xi_1 z_4 - \xi_2[z_3 + z_4(\log ak_1)^{10}] = 0.
\end{aligned}$$

5. La quadrique de Lie Φ attachée au point x a pour équation locale

$$z_1 z_4 + z_2 z_3 = 0.$$

Pour trouver l'équation de la quadrique de Lie $\Phi^{(1)}$ attachée au point x_1, désignons par ξ une racine de l'équation

$$\xi^2 + \alpha = 0.$$

On a alors

$$U^{(1)} = \lambda^{(1)}[V_2 + V_1\{\xi + (\log ak_1)^{10}\}], \qquad U_1^{(1)} = \lambda_1^{(1)}[V_1 + \xi V],$$
$$U_2^{(1)} = \lambda_2^{(1)}[2a\xi U - (k_1 + \xi^{01})V],$$

(¹) Nous rectifions ici les formules données page 9 de notre travail *La Théorie des Surfaces et l'Espace réglé*, où s'est glissée une erreur de signe.

les λ étant des facteurs de proportionnalité dont nous pourrons disposer dans la suite.

Un point du plan $U^{(1)}U_1^{(1)}U_2^{(1)}$ peut être représenté par

$$\mu[V_2+V_1\{\xi+(\log. ak_1)^{10}\}]+\mu_1(V_1+\xi V)+\mu_2[2a\xi U-(k_1+\xi^{01})V],$$

et pour que ce point appartienne à Q, on doit avoir

$$\mu_1^2+2\mu\mu_2(k_1+\xi^{01})=0.$$

On trouve ainsi, pour l'équation de $\Phi^{(1)}$,

$$2a\xi(z_3-\xi z_4)^2+(k_1+\xi^{01})(z_1z_4+z_2z_3)=0.$$

Les quadriques Φ, $\Phi^{(1)}$ se touchent suivant les droites

$$z_3=z_4=0, \qquad z_1+\xi z_2=z_3-\xi z_4=0,$$

tangentes, la première à la ligne u de (x) au point x, la seconde à la ligne u de (x_1) au point

$$x_1=\xi n+y.$$

La quadrique de Lie $\Phi^{(-1)}$ de la surface (x_{-1}) relative au point

$$x_{-1}=-\xi n+y$$

a pour équation

$$-2a\xi(z_3+\xi z_4)^2+(k_1-\xi^{01})(z_1z_4+z_2z_3)=0.$$

Elle touche la quadrique $\Phi^{(1)}$ le long de la droite xm $(z_3=z_4=0)$ et ces deux quadriques ont encore en commun deux droites représentées sur Q par les deux points de cette hyperquadrique appartenant à la droite U_3U_4. Les quadriques $\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(-1)}$ passent donc par les quatre points caractéristiques des quadriques Φ_2, Φ_3, communs à ces quadriques.

6. Nous avons

$$U_3+2a[\alpha V+V_1(\log ak_1)^{10}+V_2]=0,$$

$$U_4-4a^2\alpha U+a\alpha^{01}V+2ak_1V_1=0,$$

$$U_5-4a^2\alpha U_1-\left[4a^2\alpha\left(\log\frac{ab}{k_1}\right)^{01}+6a^2\alpha^{01}\right]U+2ak_1k_2V=0.$$

Nous allons en déduire les équations des quadriques Φ_2, Φ_3.

quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques.

Tout point du plan $U_2 U_3 U_4$ a des coordonnées de la forme

$$\mu_2 U_2 + \mu_3 U_3 + \mu_4 U_4.$$

Pour que ce point appartienne à Q, on doit avoir

$$\alpha\mu_3^2 - 2\alpha\mu_2\mu_4 - 2\alpha^{01}\mu_3\mu_4 - k_1^2\mu_4^2 = 0,$$

et l'équation de la quadrique Φ_2 est

$$k_1(z_1^2 - \alpha z_2^2) + 2\alpha^{01} z_1 z_2 + 4a\alpha(z_1 z_3 - \alpha z_2 z_4) = 0.$$

De même, tout point du plan $U_3 U_4 U_5$ peut être représenté par

$$\mu_3[\alpha V + V_1(\log a k_1)^{10} + V_2] + \mu_4[4a\alpha U - \alpha^{01} V - 2k_1 V_1]$$
$$+ \mu_5 \left[2a\alpha U_1 + \left\{ 2a\alpha \left(\log \frac{ab}{k_1}\right)^{01} + 3a\alpha^{01} \right\} U + k_1 k_2 V \right]$$

et pour que ce point appartienne à Q, on doit avoir

$$\alpha\mu_3^2 - 4k_1^2\mu_4^2 + 4a^2\alpha^2\mu_5^2 - 2\alpha^{01}\mu_3\mu_4 + 2k_1k_2\mu_3\mu_5 = 0.$$

L'équation de la quadrique Φ_3 est

$$2a\alpha k_1(z_1 z_3 - \alpha z_2 z_4) + (a\alpha\alpha^{01} - k_1^2 k_2)(z_1 z_4 - z_2 z_3)$$
$$+ \left[4a^2\alpha^2 + 2a\alpha k_1 \left(\log \frac{ab}{k_1}\right)^{01} + 3a k_1 \alpha^{01} \right] z_3^2$$
$$+ \left[4a\alpha k_1 k_2 - 2a\,\alpha\alpha^{01} \left(\log \frac{ab}{k_1}\right)^{01} - 3a\overline{\alpha^{01}}^2 \right] z_3 z_4 = 0.$$

On vérifie qu'elle passe bien par la droite $z_3 = z_4 = 0$, tangente à l'asymptotique u au point x.

L'équation de la quadrique Φ_1 est

$$z_1^2 + \alpha z_2^2 \equiv (z_1 - \xi z_2)(z_1 + \xi z_2) = 0;$$

cette quadrique se réduit au couple des plans tangents aux surfaces (x_1), (x_{-1}).

7. La droite xx_2 est représentée sur Q par le point $U_2^{(1)}$ et, par suite, cette droite a pour équations

$$(k_1 + \xi^{01}) z_2 + 2a\xi z_3 = 0, \qquad z_4 = 0.$$

Les points caractéristiques de la quadrique $\Phi^{(1)}$ sont déterminés, sur cette quadrique, par les deux quadriques dégénérées

$$[(k_1 + \xi^{01}) z_2 + 2a\xi (z_3 - \xi z_4)]^2 = 0,$$

$$(z_3 - \xi z_4)\left[\xi (z_1 + \xi z_2) + \left\{\xi \left(\log \frac{ab\xi}{k_1 + \xi^{01}}\right)^{01} + k_1 + \xi^{01}\right\} (z_3 - \xi z_4)\right] = 0,$$

dont les équations s'obtiennent en dérivant par rapport à u, v l'équation de $\Phi^{(1)}$ et en tenant compte de cette équation.

On en déduit l'expression du point x_2 sur la forme

$$x_2 = (k_1 + \xi^{01}) \left[\xi \left(\log \frac{ab\xi}{k_1 + \xi^{01}}\right)^{01} + (k_1 + \xi^{01})\right] x$$
$$+ 2ax (\xi x - m) - \xi (k_1 + \xi^{01}) n.$$

8. Le réseau (U_1) est à invariants égaux ; il doit en être de même du réseau $(U^{(1)})$. Posons, en effet, en prenant $\lambda_1^{(1)} = 1$,

$$U_1^{(1)} = V_1 + \xi V.$$

On a

$$[U_1^{(1)}]^{11} = (k_1 + \xi^{01}) U_1^{(1)}.$$

On pourrait ensuite poser

$$U^{(1)} = \frac{1}{k_1 + \xi^{01}} [V_2 + V_1 \{ \xi + (\log ak_1)^{10} \}],$$

pour obtenir, pour la suite L_1, des formules analogues à celles de la suite L. Il est plus facile, pour la suite des calculs, de poser

$$U^{(1)} = V_2 + V_1 [\xi + (\log ak_1)^{10}].$$

On a alors

$$[U_1^{(1)}]^{10} = U^{(1)}, \qquad [U^{(1)}]^{01} = \varphi U_1^{(1)}$$

et, par suite,

$$[U^{(1)}]^{11} - [U^{(1)}]^{01} (\log \varphi)^{10} - \varphi U^{(1)} = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$\varphi = k_1 + \xi^{01} = \frac{k_1}{\xi} [\xi + (\log ak_1)^{10}].$$

On en déduira

$$V^{(1)} = [U^{(1)}]^{10} - U^{(1)} (\log \varphi)^{10} ;$$

quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques.

d'où, en posant

$$\varphi_1 = -(\log \varphi)^{11} + \varphi,$$
$$[V^{(1)}]^{01} = \varphi_1 U^{(1)},$$
$$[V^{(1)}]^{11} - [V^{(1)}]^{01} (\log \varphi\varphi_1)^{10} - \varphi_1 V^{(1)} = 0.$$

Par conséquent, on aura

$$V_1^{(1)} = [V^{(1)}]^{10} - V^{(1)} (\log \varphi\varphi_1)^{10}.$$

En tenant compte de la relation

$$\begin{aligned} &V_3 + V_2 (\log a^3 k_1^2 k_2)^{10} \\ &+ V_1 [\alpha + (\log a k_1)^{20} + (\log a k_1)^{10} (\log a^2 k_1)^{10}] + 2b U_2 = 0, \end{aligned}$$

on aura

$$V^{(1)} = \frac{4ab\xi}{\varphi} U^{(1)} - 2b U_2,$$

et ensuite

$$V_1^{(1)} = \left[\frac{4ab\xi}{\varphi} - \left(\log \frac{\varphi\varphi_1}{b}\right)^{10}\right] V^{(1)} - 2b h_1 U_1.$$

On a d'ailleurs

$$\varphi_1 = 4ab + 4\left(\frac{ab\xi}{\varphi}\right)^{01}$$

et l'on peut écrire $V_1^{(1)}$ sous la forme

$$V_1^{(1)} = \frac{4ab h_1 \xi}{\varphi\varphi_1} V^{(1)} - 2b h_1 U_1.$$

On en déduit

$$[V_1^{(1)}]^{01} = \left[4b h_1 \left(\frac{a\xi}{\varphi\varphi_1}\right)^{01} + h_1\right] V^{(1)}.$$

9. Les points $U_1^{(1)}$, $U_1^{(-1)}$ sont donnés par

$$U_1^{(1)} = V_1 + \xi V, \qquad U_1^{(-1)} = V_1 - \xi V$$

et par conséquent ces points partagent harmoniquement le couple V, V_1. La congruence $(V V_1)$ est une congruence de Ribaucour. Il doit en être de même de la congruence $(V^{(1)} V_1^{(1)})$ et les points U_1, $U_1^{(2)}$ séparent harmoniquement le couple $V^{(1)}, V_1^{(1)}$. Nous pouvons donc poser

$$2b h_1 U_1^{(2)} = V_1^{(1)} + \frac{4ab h_1 \xi}{\varphi\varphi_1} V^{(1)}.$$

On en déduit

$$2b\,U_2^{(2)} = \left[8b\left(\frac{a\xi}{\varphi\varphi_1}\right)^{01} + 1\right] V^{(1)} + \frac{4ab\xi}{\varphi}\, U^{(1)}.$$

Le point $U_2^{(2)}$ représente la droite $x_1 x_3$, qui engendre une congruence W et qui a pour équations

$$z_1 + \xi z_2 = 0$$

$$\left[4b\left(\frac{a\xi}{\varphi\varphi_1}\right)^{01} + 1\right]\left[z_2 + \frac{4a\xi}{\varphi}(z_3 - \xi z_4)\right] + 4b\left(\frac{a\xi}{\varphi\varphi_1}\right)^{01} z_2 = 0.$$

Liége, le 15 mai 1934.