Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 6 janvier 1934, pp. 8-11, n° 1.

Sur la construction de Surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Les surfaces algébriques non rationnelles, de genres $p_a = p_g = 0$, n'ont pas encore fait l'objet d'une théorie générale (¹). Pendant longtemps, l'existence de ces surfaces ne fut prouvée que par deux exemples : la surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre, découverte par M. Enriques, et une surface contenant un faisceau de courbes bicanoniques elliptiques construite par M. Castelnuovo. Depuis, d'autres exemples ont été construits par M. Enriques, par M. Campedelli et par nous. Dans ces conditions, il n'est pas sans intérêt de donner des procédés de construction de surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 0$; nous avons indiqué récemment un tel procédé (²) ; nous allons en exposer un second. D'une manière précise, nous établirons le théorème suivant :

Si une surface algébrique régulière de genre $p_g = 1$ *possède*

(¹) Voir, dans la collection des « Exposés de Géométrie », publiée sous la direction de M. CARTAN, notre travail, *Les Surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (Paris, Hermann, « Actualités scientifiques et industrielles », 1934, 33 p.). Nous renvoyons à ce travail pour les indications bibliographiques sur la question.

(²) Sur certaines involutions cycliques dépourvues de points unis, appartenant à une surface algébrique. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1933, pp. 986-991).

une involution d'ordre deux, privée de points unis, la surface image de cette involution a les genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 0$.

Si la surface considérée possède une courbe canonique d'ordre zéro, on retrouve un théorème connu. On remarquera que le fait que l'involution est dépourvue de points unis est essentiel.

1. Soit F une surface algébrique régulière, de genre géométrique $p_g = 1$, possédant une unique courbe canonique K et transformée en elle-même par une transformation birationnelle involutive T, dépourvue de points unis. Désignons par I_2 l'involution engendrée par T, et par Φ une surface image de cette involution. La courbe canonique K est transformée en elle-même par T et il lui correspond, sur Φ, une courbe K^*.

Considérons, sur F, un système linéaire $|C|$, irréductible, ∞^2 au moins, transformé en lui-même par T mais non composé au moyen de l'involution I_2. Le système $|C|$ contient deux systèmes linéaires partiels, $|C_1|$, $|C_2|$, composés au moyen de I_2. Aux courbes C_1, C_2 correspondent respectivement sur Φ des courbes Γ_1, Γ_2, de même genre et de même degré. Si π est le genre des courbes Γ_1, Γ_2 et n leur degré, le système $|C|$ a le genre $2\pi - 1$ et le degré $2n$.

Le système $|C'|$ adjoint au système $|C|$ découpe, sur chaque courbe C, la série canonique complète de cette courbe, puisque F est régulière. Le système $|C'|$ est transformé en lui-même par T et il contient deux systèmes linéaires partiels, $|C'_1|$, $|C'_2|$, composés au moyen de l'involution I_2. L'un de ces systèmes, par exemple $|C'_1|$, contient les courbes $C_1 + K$; l'autre système, $|C'_2|$, contenant les courbes $C_2 + K$.

Désignons par $|\Gamma'_1|$, $|\Gamma'_2|$ les systèmes linéaires qui correspondent, sur Φ, aux systèmes $|C'_1|$, $|C'_2|$. Nous avons

$$|\Gamma'_1| = |K^* + \Gamma_1|, \quad |\Gamma'_2| = |K^* + \Gamma_2|.$$

Puisque $p_g = 1$ et que les courbes C ont le genre $2\pi - 1$, le système $|C'|$ a la dimension $2\pi - 1$.

2. Fixons l'attention sur une courbe C_1 et sur la courbe Γ_1 correspondante. La série canonique de C_1, d'ordre $4\pi - 4$ et de dimension $2\pi - 2$, contient deux séries partielles formées de groupes transformés en eux-mêmes par T ; l'une de ces séries est découpée par les courbes C'_1, l'autre par les courbes C'_2. L'une de ces séries est la transformée de la série canonique de la courbe Γ_1, et deux cas peuvent se présenter :

a) L'adjoint de $|\Gamma_1|$ est $|\Gamma'_1|$;

b) L'adjoint de $|\Gamma_1|$ est $|\Gamma'_2|$.

Plaçons-nous dans le premier cas. Alors, l'adjoint de $|\Gamma_2|$ est $|\Gamma'_2|$ et la courbe K^* est une courbe canonique de Φ. Le genre géométrique de Φ est par suite $p_g = 1$. Cela étant, les courbes Γ_1, Γ_2 étant de genre π, les systèmes $|\Gamma'_1|$, $|\Gamma'_2|$ ont la dimension π.

D'après la théorie des homographies, entre les dimensions r_1, r_2, r de $|C'_1|$, $|C'_2|$, $|C'|$, on a la relation

$$r_1 + r_2 = r - 1. \tag{1}$$

Actuellement, on a $r_1 = r_2 = \pi$, $r = 2\pi - 1$, ce qui est absurde. Le premier cas ne peut se présenter.

L'adjoint de $|\Gamma_1|$ est donc $|\Gamma'_2|$ et l'adjoint de $|\Gamma_2|$, $|\Gamma'_1|$. La courbe $\Gamma'_2 - \Gamma_1$ ou $\Gamma'_1 - \Gamma_2$ ne peut exister et l'on a, pour la surface Φ, $p_g = 0$. Les systèmes $|\Gamma'_1|$, $|\Gamma'_2|$ ont la dimension $\pi - 1$ et la relation (1) est vérifiée.

Les courbes Γ'_1 découpent sur une courbe Γ_1 des groupes de $2\pi - 2$ points, non canoniques, et par suite appartenant à une série de dimension $\pi - 2$. Il existe donc bien une courbe Γ'_1 contenant une courbe Γ_1 et donnant comme résidu la courbe (non canonique) K^*.

3. L'adjoint $|C''|$ de $|C'|$ est transformé en lui-même par T et contient deux systèmes linéaires partiels $|C''_1|$, $|C''_2|$, composés au moyen de I_2. Soient $|\Gamma''_1|$, $|\Gamma''_2|$ les systèmes correspondants sur Φ. D'après ce qui précède, $|\Gamma''_1|$ est l'adjoint de $|\Gamma'_2|$ et par suite le biadjoint de $|\Gamma'_1|$.

On a

$$|\Gamma''_1| = |K^* + \Gamma'_1| = |2K^* + \Gamma_1|;$$

d'où

$$|2K^*| = |\Gamma''_1 - \Gamma_1|.$$

La courbe $2K^*$ est donc une courbe bicanonique de la surface Φ et le bigenre de cette surface est $P_2 \geqq 1$.

Le genre arithmétique π_a de Φ est lié au genre arithmétique $p_a = 1$ de F par la relation

$$p_a + 1 = 2(\pi_a + 1);$$

d'où $\pi_a = 0$.

La surface Φ a donc les caractères $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 0$. Ainsi se trouve établi le théorème énoncé au début.

Liége, le 3 janvier 1934.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles.