Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*, N° 5, 1933.

Sur les quadriques de Moutard,

par Lucien GODEAUX, professeur à l'Université de Liége.

Dans une note insérée au tome II des *Applications d'analyse et de géométrie* de Poncelet [1], Moutard a donné le théorème suivant :

Les coniques ayant avec une surface, en un point ordinaire, un contact du quatrième ordre et situées dans les plans passant par une même tangente à la surface, engendrent une quadrique osculatrice à la surface. Parmi ces coniques, il y en a deux en général qui ont un contact du cinquième ordre avec la surface.

On sait l'intérêt que présentent les quadriques de Moutard en géométrie projective différentielle. Cet intérêt nous a conduit à chercher une démonstration du théorème de Moutard, démonstration basée sur le fait que les quadriques osculatrices à une surface en un point ordinaire de celle-ci forment un système homaloïdal. La transformation obtenue en rapportant projectivement les quadriques de ce système aux plans de l'espace fait correspondre aux quadriques de Moutard les plans tangents à une surface cubique, le long d'une cubique plane de cette surface.

1. Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 d'un point x de la surface satisfont à un système complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles que l'on peut ramener à la forme (Wilczynski)

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1x = 0,$$
$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2x = 0,$$

a et b n'étant pas nulles.

A un point x non parabolique de la surface (x) attachons le tétraèdre $xx^{10}x^{01}x^{11}$; tout point de l'espace a des coordonnées de la forme

$$z_1x + z_2x^{10} + z_3x^{01} + z_4x^{11};$$

z_1, z_2, z_3, z_4 sont les coordonnées locales du point considérés.

(1) Paris, Gauthier-Villars, 1864. Voir pp. 363 et 364.

Le point $x(u+\xi,\ v+\eta)$ de la surface (x) a pour coordonnées locales

$$\left.\begin{aligned}
{}_1z &= 1 - \frac{1}{2}(c_1\xi^2 + c_2\eta^2)\\
&\quad - \frac{1}{6}[c_1^{10}\xi^3 + 3(c_1^{01} - 2bc_2)\xi^2\eta + 3(c_2^{10} - 2ac_1)\xi\eta^2 + c_2^{01}\eta^3] + \cdots,\\
z_2 &= \xi - a\eta^2 - \frac{1}{6}[c_1\xi^3 - 12ab\xi^2\eta + 3(2a^{10} + c_2)\xi\eta^2 + 2a^{01}\eta^3] + \cdots,\\
z_3 &= \eta - b\xi^2 - \frac{1}{6}[2b^{10}\xi^3 + 3(2b^{01} + c_1)\xi^2\eta - 12ab\xi\eta^2 + c_2\eta^3] + \cdots,\\
z_4 &= \xi\eta - \frac{1}{3}(b\xi^3 + a\eta^3)\\
&\quad - \frac{1}{6}[b^{10}\xi^4 + (2b^{01} + c_1)\xi^3\eta - 6ab\xi^2\eta^2 + (2a^{10} + c_2)\xi\eta^3 + a^{01}\eta^4] + \cdots.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

2. Les quadriques ayant un contact du second ordre avec la surface (x) au point x ont pour équation locale

$$\lambda_1(z_1z_4 - z_2z_3) + \lambda_2 z_2 z_4 + \lambda_3 z_3 z_4 + \lambda_4 z_4^2 = 0; \quad (2)$$

elles forment un système homaloïdal. Par conséquent, les équations

$$\frac{z_1'}{z_1z_4 - z_2z_3} = \frac{z_2'}{z_2z_4} = \frac{z_3'}{z_3z_4} = \frac{z_4'}{-z_4^2}$$

définissent une transformation birationnelle (d'ailleurs involutive), que nous désignerons par T.

Considérons la courbe tracée sur (x), passant par le point x et définie par $\eta = \lambda\xi$ Les quadriques (2) ayant un contact du troisième ordre avec cette courbe sont données par

$$2(b + a\lambda^3)\lambda_1 + 3\lambda_2\lambda + 3\lambda_3\lambda^2 = 0;$$

elles forment un réseau auquel T fait correspondre la gerbe de plans de sommet

$$\frac{z_1'}{2(b + a\lambda^3)} = \frac{z_2'}{3\lambda} = \frac{z_3'}{3\lambda^2}, \qquad z_4' = 0.$$

Lorsque λ varie, le lieu de ce point est la cubique

$$3z_1'z_2'z_3' - 2(bz_2'^3 + az_3'^3) = 0, \qquad z_4' = 0. \quad (3)$$

Cette cubique représente le domaine du troisième ordre du point x sur la surface (x).

3. La surface cubique la plus générale passant par la cubique (3) a pour équation

$$\begin{aligned}
&z_4^3 + z_4^2(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3)\\
&+ z_4(\lambda_{11} z_1^2 + \lambda_{22} z_2^2 + \lambda_{33} z_3^2 + \lambda_{12} z_1 z_2 + \lambda_{13} z_1 z_3 + \lambda_{23} z_2 z_3)\\
&+ \lambda_0 [3 z_1 z_2 z_3 - 2(b z_2^3 + a z_3^3)] = 0.
\end{aligned}$$

La transformation T lui fait correspondre la surface

$$\begin{aligned}
&- z_4^4 + z_4^2[\lambda_1(z_1 z_4 - z_2 z_3) + \lambda_2 z_2 z_4 + \lambda_3 z_3 z_4]\\
&-[\lambda_{11}(z_1 z_4 - z_2 z_3)^2 + \lambda_{22} z_2^2 z_4^2 + \lambda_{33} z_3^2 z_4^2 + z_4(z_1 z_4 - z_2 z_3)(\lambda_{12} z_2 + \lambda_{13} z_3) + \lambda_{23} z_2 z_3 z_4^2]\\
&+ \lambda_0[3(z_1 z_4 - z_2 z_3) z_2 z_3 - 2(b z_2^3 + a z_3^3) z_4] = 0.
\end{aligned}$$

Pour $\lambda_{11} = -3\lambda_0$, cette surface se réduit à la surface cubique

$$\begin{aligned}
&- z_4^3 + z_4[\lambda_1(z_1 z_4 - z_2 z_3) + \lambda_2 z_2 z_4 + \lambda_3 z_3 z_4]\\
&- [\lambda_{22} z_2^2 z_4 + \lambda_{33} z_3^2 z_4 + (z_1 z_4 - z_2 z_3)(\lambda_{12} z_2 + \lambda_{13} z_3) + \lambda_{23} z_2 z_3 z_4]\\
&+ \lambda_0[3 z_1(z_1 z_4 - z_2 z_3) - 2(b z_2^3 + a z_3^3)] = 0.
\end{aligned}$$

Cette surface a un contact du troisième ordre avec la surface (x) au point x.

Considérons en particulier les surfaces cubiques ayant au point x un contact du quatrième ordre avec la surface (x). Ces surfaces ont été éonsidérées par M. B. Segre (¹) et par M. Lane (²); elles ont pour équation

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{2}{3}(b z_2^3 + a z_3^3) - (z_1 z_4 - z_2 z_3)\left[z_1 - \frac{1}{4} z_2 (\log b)^{10} - \frac{1}{4} z_3 (\log a)^{01}\right]\\
&\quad + \frac{1}{6} b \left(\log \frac{b^4}{a}\right)^{01} z_2^2 z_4 + \frac{1}{6} a \left(\log \frac{a^4}{b}\right)^{10} z_3^2 z_4\\
&\quad + \lambda_2 z_2 z_4^2 + \lambda_3 z_3 z_4^2 + \lambda_4 z_4^3 + \lambda_5 (z_1 z_4 - z_2 z_3) z_4 = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

A cette surface, T fait correspondre la surface cubique

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{2}{3}(b z_2^3 + a z_3^3) + z_1\left[z_1 z_4 - z_2 z_3 - \frac{1}{4} z_2 z_4 (\log b)^{10} - \frac{1}{4} z_3 z_4 (\log a)^{01}\right]\\
&\quad - \frac{1}{6} b \left(\log \frac{b^4}{a}\right)^{01} z_2^2 z_4 - \frac{1}{6} a \left(\log \frac{a^4}{b}\right)^{10} z_3^2 z_4\\
&\quad + \lambda_2 z_2 z_4^2 + \lambda_3 z_3 z_4^2 - \lambda_4 z_4^3 + \lambda_5 z_1 z_4^2 = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

(¹) La cubique indicatrice de l'élément linéaire projectif d'une surface. (*C. R.*, 21 mars 1927.)

(²) The contact of a cubic surface with an analytic surface. (*Transactions of the Amer. Math. Society*, 1927, t. 29, pp. 471-480.)

4. A la surface (x), la transformation T fait correspondre une surface analytique σ passant simplement par la cubique (3) et la surface cubique (5) se raccorde à la surface σ le long de cette cubique.

Cela étant, soit ϖ un plan passant par le point x mais distinct du plan tangent $xx^{10}x^{01}$ à la surface (x) en ce point. Soit γ une conique ayant au point x un contact du quatrième ordre avec la section de la surface (x) par le plan ϖ. Au plan ϖ, T fait correspondre un plan ϖ' et à la conique γ, une droite r tangente a la surface σ au point P de rencontre de ϖ et de la cubique (3), en dehors du point double de cette courbe. La droite r est par suite tangente en P à la surface (5). Lorque le plan ϖ tourne autour de la droite suivant laquelle il coupe le plan $xx^{10}x^{01}$, la droite r continue à passer par P et décrit le plan tangent ϖ_1 en ce point à la surface (5). A ce plan, T fait correspondre une quadrique, lieu de la conique γ. C'est la quadrique de Moutard relative à l'axe du faisceau des plans ϖ.

Soit

$$z_2 + \theta z_3 + \mu z_4 = 0$$

l'équation du plan ϖ. Le plan que T lui fait correspondre a pour équation

$$z_2 + \theta z_3 - \mu z_4 = 0.$$

et par suite le point P a pour coordonnées

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = 2\,(a - b\theta^3) : 3\theta^2 : -3\theta : 0.$$

L'équation du plan ϖ_1 est donc

$$\begin{gathered} 9\theta^3 z_1 + 6\,(2b\theta^4 + a\theta)\, z_2 + 6\,(2a\theta^2 + b\theta^5)\, z_3 \\ + \left[4\,(a - b\theta^3)^2 + \frac{3}{2}\, b^{10}\theta^5 + \frac{3}{2}\, a^{01}\theta - 6b\,(\log b)^{01}\theta^4 - 6a\,(\log a)^{10}\theta^2\right] z_4 = 0. \end{gathered}$$

Par conséquent, la quadrique de Moutard relative à la droite

$$z_2 + \theta z_3 = 0, \qquad z_4 = 0, \tag{6}$$

tangente à la surface (x) au point x, a pour équation [1]

$$\begin{gathered} 9\theta^3 (z_1 z_4 - z_2 z_3) + 6\,(2b\theta^4 + a\theta)\, z_2 z_4 + 6\,(2a\theta^2 + b\theta^5)\, z_3 z_4 \\ + \left[4\,(a - b\theta^3)^2 + \frac{3}{2}\, b^{10}\theta^5 + \frac{3}{2}\, a^{01}\theta - 6b\,(\log b)^{01}\theta^4 - 6a\,(\log a)^{10}\theta^2\right] z_4^2 = 0. \end{gathered}$$

---

(1) L'équation des quadriques de Moutard a été également donnée par M. Cech, Les quadriques de Moutard. (*Publications de la Faculté des Sciences de Brno*, 1921.)

5. Reprenons le point P et le plan ϖ tangent en ce point à la surface (5) et par suite à la surface σ. Aux tangentes asymptotiques en P à la surface σ correspondent, par T, des coniques ayant un contact du cinquième ordre avec la surface (x) au point x; les deux coniques ainsi obtenues sont dans des plans passant par la droite (6) et par suite la seconde partie du théorème de Moutard en résulte.

Liége, le 4 mai 1933.

MARCEL HAYEZ, Imprimeur, 112, rue de Louvain, Bruxelles.