Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance publique du 16 décembre 1933, n° 12.

L'École de Géométrie de l'Université de Liége

par Lucien GODEAUX,
Correspondant de l'Académie.

Si la Belgique a compté, aux XVI^e et XVII^e siècles, des mathématiciens de talent et parmi eux plusieurs précurseurs du Calcul infinitésimal, on ne trouve, par contre, au siècle suivant, qu'un seul de nos compatriotes ayant fait preuve d'originalité en mathématiques : le Montois Jacques-François Le Poivre (...-1710). D'ailleurs, à cette époque, il semble que la torpeur intellectuelle fut générale dans les Pays-Bas autrichiens. Les efforts de Marie-Thérèse et de Charles de Lorraine, notre réunion pendant près d'un quart de siècle à un peuple chez qui les choses de l'esprit furent toujours en honneur, allaient cependant ramener dans notre Pays le goût de la recherche scientifique. L'ancienne Université de Louvain n'avait pas survécu à la tourmente révolutionnaire, les Facultés créées par le Gouvernement français à Bruxelles, en 1809, disparurent peu après la chute de Napoléon; mais, en 1817, trois Universités étaient fondées à Gand, Liége et Louvain. Depuis 1835, la Belgique compte quatre Universités, à l'existence desquelles l'essor intellectuel du Pays est intimement lié. Et l'histoire des recherches scientifiques dans notre Pays au XIX^e siècle se confond avec celle de ces Universités. Il n'est pas sans intérêt de retracer le développement de ces recherches; c'est ce que nous voudrions faire en partie, en nous limitant aux contributions apportées à la Géométrie par ceux qui eurent la charge d'enseigner cette science à l'Université de Liége.

On peut considérer Germinal Dandelin (1794-1847) comme le fondateur de l'École de Géométrie de l'Université de Liége. Sous l'impulsion de l'animateur que fut Adolphe Quetelet, Dandelin, ancien élève de l'École Polytechnique, avait établi par la Géométrie pure, en considérant les sections planes du cône de révolution et de l'hyperboloïde, d'élégants théorèmes qui devinrent immédiatement classiques sous le nom de théorèmes belges sur les coniques. Or, en 1825, Dandelin fut chargé d'organiser, à l'Université de Liége, le cours d'exploitation des mines; il y enseigna également, jusqu'en 1830, la Géométrie analytique et il eut comme élève Brasseur, sur la formation de qui son influence fut considérable.

Après un séjour d'un an à Paris, où il suivit les cours de Cauchy et de Hachette, Jean-Baptiste Brasseur (1802-1868), un des premiers docteurs en Sciences de l'Université de Liége, fut chargé d'enseigner, dans cette Université, la Géométrie descriptive et la Mécanique appliquée; il joignit bientôt à cet enseignement un cours libre destiné aux élèves du Doctorat en Sciences physiques et mathématiques. Parfois suppléé, vers la fin de sa vie, par un de ses fils, Léopold, qui devait d'ailleurs le précéder dans la tombe, Brasseur exposait dans ce cours les recherches de Quetelet et Dandelin, ainsi que la théorie projective des coniques et des quadriques. La publication du *Traité des Propriétés projectives des Figures* (1822), de Poncelet, venant après les travaux de Monge et de Carnot, avait mis ce genre d'études en honneur. On sait qu'il faut rechercher les origines de la Géométrie projective dans les méthodes de perspective utilisées par les peintres et les architectes de la Renaissance; c'est Desargues et Pascal qui furent les premiers à appliquer ces méthodes aux recherches de géométrie. Il est intéressant de rappeler ici que J.-F. Le Poivre, que nous citions plus haut, est l'auteur d'un *Traité des Sections du Cône considérées dans le Solide*, publié à Mons en 1708 et dont une première ébauche parut à Paris en 1704, où sont employées les méthodes de la Géométrie projective. Traduites en langage moderne, les recherches de Le Poivre reviennent à considérer deux plans perspectifs non superposés; à un cercle de l'un correspond une conique de l'autre, et en utilisant les droites limites, l'auteur distingue les cas où cette conique est une ellipse, une parabole ou une hyperbole. Ce sont les propriétés des tangentes qui sont particulièrement étudiées.

Mais revenons à Brasseur. C'est en utilisant les méthodes de la Géométrie descriptive qu'il arrive aux propriétés des coniques et des quadriques. Il démontre, par exemple, les propriétés des quadriques par la Géométrie cotée; mais c'est son Mémoire *Sur une nouvelle Méthode d'application de la Géométrie descriptive à la Recherche des Propriétés de l'Étendue* qui présente le plus d'intérêt. Il contient un exposé original de la Géométrie projective basé sur un principe presque évident : Imaginons une famille simplement infinie de courbes tracées sur une surface algébrique et projetons orthogonalement ces courbes sur deux plans quelconques; après avoir rabattu l'un des plans sur l'autre, on obtient deux familles homographiques de courbes et les points de rencontre des courbes homologues se trouvent sur une courbe qui n'est autre que la projection de la section de la surface par le second bissecteur. Ce n'est qu'en 1855 que Brasseur a publié ses recherches, mais elles formaient depuis de nombreuses années l'objet de son enseignement. Il en est de même de ses études sur la double projection conique, qui ne parurent que plusieurs années après sa mort et où il considère les formes projectives obtenues en projetant sur un plan, de deux points distincts, certaines figures de l'espace.

Le cours libre fondé par Brasseur devait devenir officiel, peu de temps après sa mort, sous le nom de cours de Géométrie supérieure. François Folie (1833-1905) en fut le premier titulaire, de 1876 à 1879. Élève de Brasseur, Folie a surtout cherché à étendre aux courbes et aux surfaces d'ordre supérieur au second les propriétés des coniques et des quadriques. Dans ce but il utilisa certains polygones associés aux courbes et des polyèdres associés aux surfaces. Ses recherches ont fait l'objet d'un grand nombre de publications, mais il les a condensées dans ses *Fondements d'une Géométrie supérieure cartésienne* (1872) et dans les *Éléments d'une Théorie des Faisceaux* (1878).

Considérons une courbe d'ordre n. Folie appelle polygones conjugués par rapport à cette courbe deux polygones de $n+p$ côtés tels que chaque côté de l'un coupe n des côtés de l'autre sur la courbe. Si un côté d'un des polygones ne rencontre pas un des côtés du second sur la courbe, ces deux côtés sont dits non adjacents. Moyennant cette terminologie, le théorème de Pascal s'énonce de la manière suivante : Si deux triangles sont conjugués par rapport à une conique, les côtés non adjacents se coupent en trois points en ligne droite. Folie étend ce théorème en démontrant que si deux polygones de $n+p$ côtés sont conjugués par rapport à une courbe d'ordre n, les côtés non adjacents se coupent sur une courbe d'ordre p. La généralisation du théorème de Desargues est obtenue en considérant les sections par une droite d'une courbe d'ordre n et de deux polygones de n côtés conjugués par rapport à cette courbe, ce qui conduit à une généralisation du rapport anharmonique. Les produits des distances d'un point de la courbe aux côtés de chacun des polygones sont dans un rapport constant, ce qui généralise le théorème de Pappus. Folie parvient à ces théorèmes en utilisant la géométrie analytique et en se basant sur le principe de Gergonne relatif aux courbes dégénérées d'un faisceau. Son quadrillage des courbes présente l'inconvénient de restreindre la généralité de celles-ci dès que l'ordre dépasse cinq. L'extension des théories précédentes aux surfaces présente le même inconvénient, car l'existence de couples de polyèdres conjugués par rapport à une surface entraîne celle de droites appartenant à cette dernière. Folie a d'ailleurs essayé de pallier à cet inconvénient en utilisant des polyèdres dont les faces sont des surfaces algébriques, mais la difficulté n'est que déplacée.

Dans le second de ses ouvrages, Folie revient sur les questions précédentes et considère en outre des faisceaux de courbes d'ordre n contenant trois courbes dégénérées en n droites.

Peu après la publication de sa théorie des faisceaux, Folie abandonna la géométrie pour se consacrer à l'astronomie. La chaire de Géométrie supérieure fut confiée à Constantin Le Paige (1852-1929), qui devait l'occuper brillamment de 1879 à 1896.

La théorie des formes algébriques et la géométrie projective sont intimement liées et l'interprétation géométrique des invariants et des covariants permet aux deux disciplines de se prêter un mutuel appui. Ce fut le mérite de Le Paige de savoir imaginer de telles interprétations et d'en tirer profit. Il fit dans ces questions œuvre de maître, et il suffit, pour se convaincre de la valeur et de l'originalité de ses résultats, de comparer ses publications à celles de Cayley, Clebsch, Weyr, Zeuthen, etc., datant de la même époque.

Considérons n formes projectives de première espèce (ponctuelles, faisceaux de rayons ou de plans,...) et supposons qu'il existe une loi telle que, un élément étant choisi dans p de ces formes, un élément soit déterminé dans chacune des n-p formes restantes. Cette loi est appelée homographie d'ordre n et de rang p; elle constitue l'interprétation géométrique de n-p formes linéaires binaires, indépendantes, à n séries de variables. Les formes projectives considérées peuvent être superposées et l'homographie présenter un caractère de symétrie tel que l'on parvienne toujours au même groupe de n éléments, quelle que soit la manière dont on choisit p éléments dans ce groupe. L'homographie est alors une involution d'ordre n et de rang p. L'étude des involutions conduit à de nombreux problèmes : détermination des éléments multiples, groupes communs à plusieurs involutions, groupes neutres, etc. Tous ces problèmes ont été abordés avec succès par Le Paige, et s'il ne les a pas résolus tous dans leur entière généralité, du moins a-t-il apporté à leur solution des contributions fondamentales. Dans son mémoire *Sur quelques Applications de la Théorie des Formes algébriques à la Géométrie* (1878), il trouve de son côté, par l'étude de certains invariants, le rapport anharmonique généralisé de Folie. Ses résultats sur les formes quadrilinéaires furent utilisés par Corrado Segre dans une recherche récente, et ce dernier dit explicitement que, parmi les nombreux mémoires consacrés à ces formes, seuls ceux de Le Paige et de De Paolis lui ont servi.

La théorie des homographies conduit à d'autres problèmes. Deux faisceaux homographiques coplanaires de droites engendrent une conique par l'intersection de leurs éléments homologues. En considérant plus de deux faisceaux homographiques, on est conduit à la génération de courbes d'ordre supérieur s'il s'agit de faisceaux de droites coplanaires, de courbes gauches et de surfaces s'il s'agit de faisceaux de plans. Chasles, Steiner, Grassmann, Cremona, d'autres encore, s'étaient occupés de ces générations. Une question se présente alors : Un être géométrique, courbe ou surface par exemple, est complètement déterminé par un certain nombre de points; comment, ces points étant donnés, construire géométriquement ces courbes ou ces surfaces? Par construction d'une courbe ou d'une surface, il faut entendre ici un procédé qui permet d'obtenir de nouveaux points de la courbe ou de la surface en n'employant que des droites et des plans. Chasles avait obtenu la cubique plane en partant de deux faisceaux homographiques formés l'un de droites, l'autre de coniques, et montré comment on pouvait construire ces faisceaux et, par conséquent, la courbe en partant de neuf points qui la déterminent. En collaboration avec Folie, Le Paige a obtenu la cubique plane comme lieu des points communs aux droites homologues de trois faisceaux liés par une homographie du troisième ordre et du second rang. Et ces auteurs ont montré que toute cubique plane peut être obtenue par ce procédé lorsqu'on en connaît neuf points. Plus tard, Le Paige, dans ses *Essais de Géométrie supérieure du troisième ordre*, a complété la théorie des homographies, des involutions, du rapport anharmonique et des groupes polaires de cet ordre, lui donnant un développement analogue à celui atteint depuis longtemps pour le second ordre.

Un des plus beaux résultats obtenus par Le Paige concerne la construction de la surface du troisième ordre (1883). August avait montré que toute surface du troisième ordre est le lieu des points communs aux plans homologues de trois faisceaux de plans liés par une homographie du troisième ordre et du second rang, les axes des trois faisceaux appartenant à la surface. En partant de cette propriété, Le Paige est parvenu à construire la surface cubique donnée par 19 points. Il commence par matérialiser en quelque sorte la construction d'August en montrant que si un tétraèdre se déforme de telle manière que trois de ses faces passent par trois droites fixes deux à deux gauches et rencontrent les trois arêtes d'un trièdre fixe en des points appartenant à la quatrième face, celle-ci étant tangente à une quadrique inscrite dans le trièdre, le quatrième sommet décrit une surface cubique passant par le sommet du trièdre et par les trois droites fixes. Ce théorème ramène la construction d'une surface cubique donnée par trois de ses droites et par sept points à celle d'une quadrique donnée par neuf de ses plans tangents. Le Paige obtient cette dernière construction en se basant sur le corrélatif du théorème suivant : Si l'on projette des côtés d'un triangle, de toutes les manières possibles, trois points d'une droite, on obtient six nouveaux points qui appartiennent à une conique. Si les trois points donnés décrivent sur la droite une involution du troisième ordre et du second rang, la conique engendre une quadrique. Par un procédé de réduction ingénieux, Le Paige ramène ensuite la construction de la surface cubique donnée par 19 points à celle d'une surface cubique donnée par 3 droites et 7 points. Il indique également comment on peut construire une section plane de la surface dès que l'on en connaît un point.

Une autre génération de la surface cubique, également due à Le Paige, s'obtient en considérant les points communs à quatre plans passant par les côtés d'un quadrilatère et coupant quatre droites deux à deux gauches en quatre points coplanaires.

Ces travaux, et particulièrement ceux qui concernent les courbes et surfaces du troisième ordre, ont valu à leur auteur le Prix quinquennal des Sciences physiques et mathématiques pour la période 1879-1883. Ils lui assurent sans conteste une place de premier plan parmi les créateurs de la Géométrie supérieure.

Ajoutons que Le Paige s'est également occupé de certaines transformations birationnelles du plan, rentrant dans le type de Jonquières.

En 1896, Le Paige céda la chaire de Géométrie supérieure à son élève de prédilection, François Deruyts (1864-1902), continuateur de ses travaux sur l'homographie et l'involution.

Le Paige avait tiré parti, dans ses recherches, de la représentation des involutions du troisième ordre sur la cubique gauche. Entre-temps, sous l'influence de Cauchy et de C. Jordan en France, de G. Veronese et d'E. d'Ovidio en Italie, de Riemann et de Grassmann en Allemagne, les géomètres s'étaient habitués à considérer les espaces à plusieurs dimensions ou hyperespaces. Ce concept, nous serions tenté de dire cette notation, s'était révélé d'autant plus fécond qu'il permettait, dans la recherche, un plus large emploi de l'intuition. François Deruyts devait l'utiliser pour représenter les homographies et les involutions sur les courbes rationnelles de l'hyperespace. Il considère, par exemple, deux représentations de l'involution d'ordre n et de rang p : Les groupes d'une telle involution sont découpés sur la courbe rationnelle normale d'un espace projectif à n dimensions par les hyperplans passant par un espace linéaire à n-p-1 dimensions ou, sur une courbe rationnelle d'ordre n d'un espace à p dimensions par les hyperplans de cet espace. Grâce à ces interprétations, F. Deruyts retrouve sans peine toutes les propriétés connues et en ajoute une foule d'autres. Les points multiples des involutions sont fournis par des hyperplans ayant certains contacts avec la courbe rationnelle envisagée, les groupes communs à plusieurs involutions par des hyperplans déterminés par les espaces linéaires intervenant dans la définition de celles-ci, les groupes neutres par les espaces plurisécants de la courbe. Dans son *Mémoire sur la Théorie de l'Homographie et de l'Involution unicursale*, couronné au Concours universitaire de 1890, F. Deruyts a fait un exposé de ses premières découvertes. Il devait les continuer et s'occuper plus particulièrement de la détermination des groupes neutres. Cela lui permit d'obtenir de nombreuses propriétés des courbes gauches rationnelles et notamment d'élégants résultats sur la sextique gauche. Dans ses premières recherches, il s'était rencontré avec un géomètre italien, G. Castelnuovo, qui avait eu, en même temps que lui, l'idée d'utiliser les courbes rationnelles des hyperespaces pour représenter les involutions; le travail dans lequel F. Deruyts faisait connaître cette représentation, et celui de M. Castelnuovo ont été présentés à quelques semaines d'intervalle, le premier à l'Académie royale de Belgique, le second à l'Institut royal vénitien.

François Deruyts s'est également occupé des projectivités hyperspatiales, de diverses questions de géométrie réglée, et il a trouvé plusieurs générations de la surface cubique. Dans l'une d'elles, particulièrement simple, il considère un triangle qui se déforme de manière que deux de ses côtés s'appuient sur deux couples de droites fixes, le troisième côté appartenant à un faisceau de rayons; le troisième sommet décrit alors une surface cubique passant par les quatre droites fixes données et par le sommet du faisceau. Cette génération lui permet de retrouver rapidement les propriétés de la configuration formée par les 27 droites de la surface.

On sait que von Staudt a cherché, sans y parvenir complètement, à affranchir la géométrie projective de tout emprunt à la notion de mesure. Le Paige et F. Deruyts ont résolu le problème en partant de la notion de couples d'éléments en involution et en définissant l'homographie comme le produit de deux involutions.

Une mort prématurée a empêché François Deruyts de continuer ses belles recherches. Le problème des groupes neutres des involutions, de la solution duquel il était bien près, devait être résolu peu après par F. Severi, par les méthodes de la Géométrie énumérative.

Ce fut M. Jacques Deruyts qui occupa, à la mort de son frère, en 1902, la chaire de Géométrie supérieure. Notre savant Confrère, qui, par ses recherches sur les formes algébriques, était, lui aussi, élève de Le Paige, n'avait pas hésité, par piété fraternelle, à accroître la charge déjà lourde de son enseignement. Ses nouvelles attributions le conduisirent à soumettre à une critique pénétrante les principes de la Géométrie projective; bien que ses recherches soient restées inédites, nous avons cru devoir les signaler. De 1911 à 1925, J. Fairon (1863-1925) fut chargé de l'enseignement de la Géométrie supérieure. Élève de F. Deruyts, il s'est surtout occupé de représenter, sur des courbes rationnelles hyperspatiales, certaines formes algébriques binaires; il a obtenu dans cette voie des résultats intéressants.

Le rapide exposé que nous venons de faire des contributions apportées à la Science par l'École de Géométrie de l'Université de Liége, montre, croyons-nous, que cette École a joué un rôle essentiel dans le développement de la Géométrie. Comme nous l'avons dit au début, nous nous sommes borné aux travaux des titulaires successifs de la chaire de Géométrie supérieure; il convient d'ajouter que certains de leurs Collègues pourraient également être cités, entre autres Eugène Catalan (1814-1894), dont l'influence sur les Mathématiques à Liége fut considérable, et Joseph Neuberg (1840-1926), un des fondateurs de la Géométrie du triangle et du tétraèdre.

Il serait injuste de taire que, dans d'autres domaines que la Géométrie, les savants dont nous venons de retracer les travaux ont joué un rôle parfois important. Nous avons dit que Brasseur fut professeur de mécanique appliquée; comme tel il a fondé le laboratoire d'où devaient sortir plus tard les beaux travaux de Dwelshauvers-Dery sur la machine à vapeur. La majeure partie de la vie scientifique de Folie a été consacrée à l'étude de l'Astronomie et il fut le fondateur de l'Institut Astrophysique de Cointe, annexé à l'Université de Liége. C'est également vers l'Astronomie que Le Paige s'est tourné dans la seconde partie de sa carrière, mais on lui doit aussi des travaux de grande valeur sur l'histoire des mathématiques, particulièrement dans l'ancien Pays de Liége, et la publication de la correspondance de René de Sluse, un des précurseurs belges du calcul infinitésimal. F. Deruyts, enfin, fut attaché pendant quelques années à l'Institut de mécanique appliquée et s'est occupé de l'application de la thermodynamique aux machines à vapeur.

Liége, octobre 1933.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles.