SUR LES DROITES D'UNE SURFACE CUBIQUE,

par M. Lucien GODEAUX, professeur à l'Université de Liége.

Une surface cubique dépourvue de point multiple contient vingt-sept droites. En général, trois de ces droites ne passent pas par un même point, mais cette circonstance peut se présenter sans qu'il en résulte, pour la surface, l'existence d'un point double. Nous dirons pour abréger qu'un point simple d'une surface cubique par lequel passent trois droites de la surface, nécessairement contenues dans le plan tangent à la surface au point considéré, est un *point planaire* de la surface. Nous nous proposons d'étudier les surfaces cubiques possédant des points planaires, dépourvues de points multiples, en utilisant la représentation plane de ces surfaces.

1. Soit F une surface cubique dépourvue de point multiple. On peut représenter cette surface point par point sur un plan ϖ de manière à ce que ses sections planes correspondent, dans une projectivité, aux cubiques planes Γ_3 de ϖ passant par six points fixes distincts $A_1, A_2, \ldots, A_6$ non situés sur une conique et dont trois ne sont jamais en ligne droite. [1]

Désignons par β_i la conique irréductible déterminée par les cinq points tirés de $A_1, A_2, \ldots, A_6$ lorsque l'on supprime A_i. Les 27 droites de la surface F sont :

1° Les six droites $a_1, a_2, \ldots\ a_6$, deux-à-deux gauches, correspondant aux points $A_1, A_2, \ldots, A_6$;

2° Les six droites $b_1, b_2, \ldots, b_6$, deux-à-deux gauches, qui correspondent respectivement aux coniques $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_6$.

3° Les quinze droites c_{ik} qui correspondent aux droites A_iA_k $(i,k = 1, 2, \ldots, 6)$.

2. Supposons qu'il existe, sur la surface F, un point M′ par lequel passent trois droites de la surface. Examinons en premier lieu le cas où, parmi ces droites, ne se trouve aucune des droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$. Au point M′ correspond, dans ϖ, un point M distinct des points $A_1, A_2, \ldots, A_6$, par lequel doivent passer trois courbes : coniques β_i ou droites A_iA_k.

Deux coniques β ne peuvent se rencontrer en dehors des points A, donc il passe au plus une conique β par le point M. Supposons que la conique β_1 passe par M. Par M doivent passer deux droites A_iA_k, distinctes ; or seule la droite MA_1 répond aux conditions posées, par suite M ne peut appartenir à une des coniques β. Cela étant, le point M appartient à trois droites A_iA_k, par exemple aux droites A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6. La courbe formée par ces trois droites est une courbe Γ_3 particulière, par suite les droites c_{12}, c_{34}, c_{56} passant par M′, appartiennent à un même plan, évidemment tangent à la surface au point M′.

Examinons le cas où, parmi les trois droites passant par M′, se trouve l'une des droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$, par exemple a_1. Aux points de a_1 correspondent, projectivement, les points du plan ϖ infiniment voisins du point A_1, donc à M′ doit correspondre un point M infiniment voisin de A_1. Le point M ne peut appartenir à deux des droites $A_1A_2, \ldots, A_1A_6$, car ces deux droites seraient confondues et F aurait un point double. Il ne peut non plus appartenir à deux des coniques $\beta_2, \ldots, \beta_6$ pour la même raison. Il faut donc que le point M appartienne à l'une des droites $A_1A_2, \ldots, A_1A_6$ et à une des coniques $\beta_2, \ldots, \beta_6$. En d'autres termes, une de ces droites doit toucher une de ces coniques en A_1. Supposons que la droite en question soit la droite A_1A_2. La conique β correspondante ne peut passer par A_2, c'est donc la conique β_2. La courbe réductible $A_1A_2 + \beta_2$ est une courbe Γ_3

[1] Voir par exemple le chap. VI, § **2** de nos *Leçons de Géométrie supérieure* (Liége, Bourguignon, 1933).

particulière, donc les droites a_1, b_2, c_{12} sont dans un même plan.

On sait que si l'on effectue une transformation birationnelle dans le plan ϖ, on obtient une nouvelle représentation plane de la surface F. Cela étant nous allons montrer que les deux cas considérés sont équivalents. Partons du second par exemple et rapportons projectivement les coniques passant par les points A_1 A_3, A_4 aux droites d'un plan ϖ'. Soient A'_2, A'_5, A'_6 les points de ϖ' homologues de A_2, A_5, A_6 ; A'_1, A'_3, A'_4 ceux qui correspondent aux droites A_3A_4, A_4A_1, A_1A_3 dans la transformation quadratique ainsi établie entre ϖ et ϖ'. Aux cubiques Γ_3 correspondent dans ϖ' les cubiques Γ'_3 passant par A'_1 ..., A'_6 et qui constituent la représentation des sections planes de F sur le plan ϖ'. A la droite A_1A_2 correspond la droite $A'_1A'_2$, à la conique β_2 correspond la droite $A'_5A'_6$ et comme β_2 touche A_1A_2 en A_1, les droites $A'_1A'_2$, $A'_5A'_6$ se coupent sur la droite $A'_3A'_4$ droite fondamentale associée à A_1 dans la transformation quadratique. On retrouve donc bien le premier cas.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface cubique dépourvue de point multiple possède un point planaire sont que, dans sa représentation plane au moyen des cubiques passant par six points A_1, A_2, ..., A_6, *ces points se distribuent par couples sur trois droites concourantes, ou qu'une des coniques* β *touche, en un des points* A_1,...,A_6, *une des droites* A_iA_k.

Il est facile de voir que la section de F par un plan passant par un point planaire M′ possède un point d'inflexion en M′. Réciproquement, si toutes les sections de F par les plans passant par un point M′ de cette surface ont un point d'inflexion en M′, la section de F par le plan tangent à la surface en M′ se compose de trois droites passant par M′ et ce point est donc planaire.

3. Si une surface F possède deux points planaires distincts, deux cas peuvent se présenter suivant que les deux points planaires appartiennent à une même droite de la surface ou non.

Dans le premier cas, on obtiendra la surface en partant de l'une des représentations planes suivantes :

1° La droite A_1A_2 contient deux des points diagonaux du quadrangle $A_3A_4A_5A_6$;

2° Les droites A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6 sont concourantes et la conique β_2 touche la droite A_1A_2 en A_1,

3° La conique β_1 touche la droite A_2A_1 en A_2 et la droite A_3A_1 en A_3 ;

4° La conique β_2 touche A_1A_2 en A_1 et la conique β_3, la droite A_1A_3 en A_1 ;

5° Les coniques β_1, β_2 touchent la droite A_1A_2 respectivement en A_2 et en A_1.

Ces dispositifs se ramènent d'ailleurs l'un à l'autre par des transformations quadratiques.

Lorsque la surface F contient deux points planaires n'appartenant pas à une même droite de la surface, on obtiendra, pour la représentation plane de celle-ci, l'un des dispositifs suivants :

1° Les triangles $A_1A_2A_3$, $A_4A_5A_6$ sont homologiques de deux manières ;

2° Les droites A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 sont concourantes et la conique β_2 touche la droite A_1A_2 en A_1 ;

3° La conique β_2 touche en A_1 la droite A_1A_2 et la conique β_4 touche en A_3 la droite A_3A_4.

Les deux derniers dispositifs se ramènent au premier par des transformations quadratiques ; nous ne considérerons donc que celui-ci et nous allons l'étudier de plus près.

4. Supposons donc les triangles $A_1A_2A_3$, $A_4A_5A_6$ homologiques de deux manières. Nous supposerons, pour fixer les idées, que les droites A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 concourent en un point M_1 et les droites A_1A_5, A_2A_6, A_3A_4 en un point M_2. Alors, à M_1, M_2 correspondent, sur F, deux points planaires M'_1, M_2. Les plans passant par M'_1, M'_2 coupent F suivant des cubiques planes ayant des points d'inflexion en M'_1, M'_2 ; par suite le troisième point d'intersection M'_3 de F avec la droite $M'_1M'_2$ est aussi un point d'inflexion pour ces cubiques. Nous allons en premier lieu retrouver ce résultat.

On sait que si deux triangles sont homologiques de deux manières, ils le sont d'une troisième. Dans le cas actuel, les droites A_1A_6, A_2A_4, A_3A_5 concourent en un point M_3. D'autre part, les courbes dégénérées $A_1A_4 + A_2A_6 + A_3A_5$, $A_1A_5 + A_2A_4 + A_3A_6$, $A_1A_6 + A_2A_5 + A_3A_4$ sont des cubiques Γ_3 passant par M_1, M_2, M_3. Ces courbes appartiennent à un faisceau. Par suite, au point M_3 correspond sur F un point planaire situé sur la droite M'_1M_2 ; c'est donc le point M'_3

Prenons le triangle $A_1A_2A_3$ comme triangle de référence et soient a_1, a_2, a_3 les coordonnées de A_4, b_1, b_2, b_3 celles de A_5, c_1, c_2, c_3 celles de A_6. L'existence des points M_1, M_2, M_3 se traduit respectivement par les égalités

$$a_2b_3c_1 = a_3b_1c_2, \qquad a_1b_2c_3 = a_2b_3c_1, \qquad a_3b_1c_2 = a_1b_2c_3, \tag{1}$$

dont l'une est la conséquence des deux autres.

Les cubiques Γ_3 passant par M_1, M_2, M_3 peuvent être représentées par l'équation

$$\left(\frac{x_2}{a_2}-\frac{x_3}{a_3}\right)\left(\frac{x_3}{c_3}-\frac{x_1}{c_1}\right)\left(\frac{x_1}{b_1}-\frac{x_2}{b_2}\right)+\lambda\left(\frac{x_2}{b_2}-\frac{x_3}{b_3}\right)\left(\frac{x_3}{a_3}-\frac{x_1}{a_1}\right)\left(\frac{x_1}{c_1}-\frac{x_2}{c_2}\right)=0. \tag{2}$$

Si l'on exprime qu'il existe une courbe (2) tangente en A_1, A_2, A_3 respectivement aux droites A_1A_3, A_2A_1, A_3A_2, on trouve les conditions (1). Désignons par Γ_3' cette cubique. Pour la même raison, il existe, sous les conditions (1), dans le faisceau (2), une cubique Γ_3'' touchant en A_4, A_5, A_6 respectivement les droites A_4A_6, A_5A_4, A_6A_5. Les cubiques Γ_3', Γ_3'' sont en général distinctes ; un calcul simple montre que la condition pour qu'elles soient confondues est

$$\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{b_2}{a_2}+\frac{a_2}{b_2}\cdot\frac{b_3}{a_3}+\frac{a_3}{b_3}\cdot\frac{b_1}{a_1}=3.$$

Sous les conditions (1) il existe de même une courbe Γ_3''' du faisceau (2) tangente aux droites A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 respectivement en A_1, A_2, A_3, et enfin une courbe du même faisceau touchant en A_4, A_5, A_6 respectivement les droites A_4A_5, A_5A_6, A_6A_4.

Aux courbes Γ_3', Γ_3''' correspondent sur F deux sections C', C''' faites par des plans passant par la droite $M_1'M_2'$. Les droites c_{23}, c_{31}, c_{12} coupent respectivement les droites a_3, a_1, a_2 en des points situés sur C' et les droites a_2, a_3, a_1 en des points situés sur C''. On obtient un résultat analogue en considérant les droites c_{56}, c_{64}, c_{45} et a_4, a_5, a_6.

On peut d'ailleurs obtenir un résultat de même nature en considérant les droites $b_1, \ldots, b_6$. Nous laisserons au lecteur le soin de l'établir, nous contentant de prouver l'existence d'une courbe du faisceau (2), touchant en A_1, A_2, A_3 respectivement les coniques β_2, β_3, β_1, par exemple. Rapportons projectivement les coniques passant par A_4, A_5, A_6 aux droites d'un plan ϖ'. Désignons par A_1', A_2', A_3' les points qui correspondent à A_1, A_2, A_3 ; A_4', A_5', A_6' les points qui correspondent aux droites A_5A_6, A_6A_4, A_4A_5, par N_1, N_2, N_3 les points qui correspondent à M_1, M_2, M_3. Aux droites A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 correspondent les droites $A_1'A_4'$, $A_2'A_5'$, $A_3'A_6'$, passant par N_1. On établit de même que les triangles $A_1'A_2'A_3'$, $A_4'A_5'A_6'$ se correspondent dans des homologies de centres N_2, N_3. Aux cubiques du faisceau (2) correspondent des cubiques passant par $A_1', \ldots, A_6'$, N_1, N_2, N_3. Il existe une de ces cubiques touchant en A_1', A_2', A_3' respectivement les droites $A_1'A_3'$, $A_2'A_1'$, $A_3'A_2'$. Or, ces droites sont les homologues des coniques β_2, β_3, β_1 ; le théorème est donc établi.

5. Nous allons maintenant introduire une condition supplémentaire, à savoir que la surface F possède un quatrième point planaire A_1' n'appartenant à aucune des droites de la surface passant par l'un des points M_1', M_2', M_3'. Il en résulte que le point A_1' doit appartenir à l'une des droites a_1, a_2, ..., a_6, par exemple à a_1. Alors, la droite A_1A_3 par exemple, touche en A_1 la conique β_3. La cubique du faisceau (2) touchant les droites A_1A_3, A_2A_1, A_3A_2 respectivement en

A_1, A_2, A_3 et celle qui touche en ces points respectivement les coniques β_3, β_1, β_2, coïncident. Par suite A_2A_1 touche β_1 en A_2 et A_3A_2 touche β_2 en A_3. Aux points A_2, A_3 correspondent donc, sur F, de nouveaux points planaires A'_2, A'_3 et aucune droite de F passant par l'un de ces points ne passe par un des points M'_1, M'_2, M'_3, A'_1. Mais les six points planaires sont dans un même plan.

Les courbes réductibles $\beta_1 + A_3A_1$, $\beta_2 + A_1A_2$ $\beta_3 + A_2A_3$ sont des courbes Γ_3 particulières et appartiennent à un faisceau ; elles touchent A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 respectivement en A_2, A_3, A_1 ; il leur correspond sur F les sections de cette surface par des plans passant par A'_1, A'_2 A'_3 donc ces trois points sont en ligne droite.

Considérons les courbes dégénérées $\beta_3 + A_3A_6$, $A_1A_3 + A_5A_6 + A_2A_5$. Ce sont des courbes Γ_3 particulières, elles appartiennent à un faisceau ayant pour points-base A_1, A_2, ..., A_6, M_1 et touchant A_1A_3 en A_1, A_6A_5 en A_6. La courbe de ce faisceau passant par un point de A_1A_4 distinct des points-base contient cette droite et est complétée par une conique passant par A_1, A_2, A_3, A_5, A_6 et touchant A_6A_4 en A_6. Cette conique coïncide donc avec β_4 et au point A_6 correspond sur F un nouveau point planaire A'_6, troisième intersection de F avec la droite $M'_1A'_1$.

On démontrerait de même que la conique β_5 touche A_4A_5 en A_4 et que la conique β_6 touche la droite A_5A_6 en A_5. Aux points A_4 A_5 correspondent deux points planaires A'_4, A'_5 de F.

De l'analyse précédente résulte qu'il existe une cubique Γ_3 touchant A_2A_1 et β_1 en A_2, A_3A_2 et β_2 en A_3, A_1A_3 et β_3 en A_1, A_6A_4 et β_4 en A_6, A_4A_5 et β_5 en A_4, A_5A_6 et β_6 en A_5, passant en outre par M_1, M_2, M_3. A cette courbe correspond sur F une courbe C, section de la surface par le plan contenant les points A'_1, A'_2, ..., A'_6, M'_1, M'_2, M'_3. Ces points sont les points d'inflexion de la courbe C.

Si une surface cubique sans point multiple possède trois points planaires non situés en ligne droite et dont deux n'appartiennent pas à une même droite de la surface, celle-ci possède neuf points planaires qui sont les points d'inflexion d'une section plane de la surface. On obtient une représentation plane de la surface en rapportant projectivement ses sections planes aux cubiques d'un plan circonscrites à deux triangles homologiques de trois manières et tels que toute conique circonscrite à l'un des triangles et passant par deux sommets du second, touche en un de ces points un des côtés du triangle, un même côté n'étant tangent qu'à une seule conique.

La première partie de ce théorème peut s'établir sans utiliser la représentation plane, en se basant sur les propriétés des points d'inflexion d'une cubique plane et sur le fait que si une droite n'appartenant pas à une surface, contient deux points planaires de cette surface, elle la rencontre encore en un troisième point planaire.

Il existe certainement des surfaces du type envisagé, telle est par exemple la surface

$$x_4^3 + f_3(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

transformée en elle-même par l'homologie de période trois

$$\frac{x_1'}{x_1} = \frac{x_2'}{x_2} = \frac{x_3'}{x_3} = \frac{x_4'}{\varepsilon x_4},$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité. Observons en passant qu'à cette homologie correspond, dans le plan ϖ, une transformation birationnelle de période trois, ayant comme points fondamentaux $A_1, A_2, \ldots, A_6$; il serait intéressant d'étudi r cette transformation.