

SUR QUELQUES TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES INVOLUTIVES ASSOCIÉES A UNE CUBIQUE GAUCHE.

Par LUCIEN GODEAUX.

Dans une note récente,* M. Purcell, reprenant une idée de Montesano,† a étudié quelques transformations birationnelles de l'espace, que l'on peut définir de la manière suivante :

Soient S, S' deux espaces projectifs à trois dimensions, G une congruence linéaire de droites de S , G' une congruence linéaire de droites de S' , θ une correspondance birationnelle entre les droites de G, G' , enfin Ω une réciprocity entre les espaces S, S' . Par un point P de S passe une droite g de G , à laquelle θ fait correspondre une droite g' de G' . Au point P , on fait correspondre le point P' intersection de g' et du plan ω que Ω fait correspondre à P . Les points P, P' sont homologues dans une transformation birationnelle T .

L'étude préparatoire de la correspondance birationnelle θ entre les congruences G, G' se fait en remarquant que les droites homologues découpent, sur des plans donnés, des points homologues dans une transformation crémonienne. Nous avons eu l'occasion, voici quelques années, d'étudier systématiquement cette question comme introduction à des recherches sur les transformations de Jonquières de l'espace.‡ Dans le cas où les congruences G, G' sont toutes deux constituées par les cordes de cubiques gauches, le passage par des plans sécants pour l'étude de la transformation θ n'est d'ailleurs pas nécessaire.

Revenons à la transformation T . Lorsque les congruences G, G' coïncident, les espaces S, S' étant superposés, que θ est une involution et Ω une polarité, la transformation T est involutive.

Nous voudrions, dans cette note, attirer l'attention sur deux transformations birationnelles involutives de l'espace, obtenues par ce procédé, qui ne possèdent qu'un nombre fini de points unis. Nous supposons que la congruence G est formée par les bisécantes d'une cubique gauche.

* "Involutorial space Cremona transformations determined by non-linear null reciprocities," *American Journal of Mathematics*, vol. 55 (1933), pp. 381-389.

† "Sulle reciprocità birazionali nulle dello spazio," *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, 1° sem. (1888), pp. 583-590.

‡ "Sur les transformations birationnelles de Jonquières de l'espace," *Mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique* (1922), pp. 1-75.

1. Soit K une cubique gauche représentée par les équations

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a'_x & b'_x & c'_x \end{vmatrix} = 0.$$

Une bisécante de K a pour équations

$$\lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x = 0, \quad \lambda_1 a'_x + \lambda_2 b'_x + \lambda_3 c'_x = 0$$

et ces bisécantes correspondent biunivoquement sans exception aux points du champs ternaire $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Une transformation birationnelle θ' de ce champs donne naissance à une correspondance birationnelle θ entre les cordes de K et réciproquement.

Si nous considérons la transformation birationnelle d'ordre n

$$\lambda'_1 : \lambda'_2 : \lambda'_3 = \phi_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) : \phi_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) : \phi_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad (\theta')$$

il lui correspond, entre les cordes de K , une transformation birationnelle θ telle qu'à une quadrique circonscrite à K corresponde une surface d'ordre $2n$ passant n fois par K . De plus, à chaque point du champs (λ) fondamental d'ordre s pour θ' , correspond une corde de K multiple d'ordre s pour ces surfaces d'ordre $2n$.

2. Considérons une transformation birationnelle θ entre les cordes de K et une polarité Ω de l'espace, dont nous désignerons la quadrique fondamentale par F . A un point P de l'espace, faisons correspondre le point P' conjugué de P par rapport à Ω et situé sur la corde de K que θ fait correspondre à celle qui passe par P . Les points P, P' se correspondent dans une transformation birationnelle T .

Désignons par r_1, r_2, \dots, r_ν les cordes de K fondamentales pour la transformation θ et soient s_1, s_2, \dots, s_ν les multiplicités de ces droites pour les surfaces ϕ d'ordre $2n$, passant n fois par K , que θ fait correspondre aux quadriques circonscrites à K . On a d'ailleurs, d'après la théorie des transformations birationnelles du plan, les relations

$$s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_\nu^2 = n^2 - 1, \quad s_1 + s_2 + \dots + s_\nu = 3(n - 1).$$

Il est aisé de voir qu'aux plans de l'espace, T fait correspondre des surfaces Φ d'ordre $4n + 1$, passant $2n$ fois par K et respectivement $2s_1, 2s_2, \dots, 2s_\nu$ fois par r_1, r_2, \dots, r_ν .

La courbe K et les droites r_1, r_2, \dots, r_ν sont des éléments fondamentaux de la transformation T . Supposons qu'un point P , n'appartenant pas à ces

courbes, soit fondamental pour T . Son homologue P' doit être indéterminé. Si ω est le plan que θ fait correspondre à P , g la corde de K passant par P , g' la corde que θ lui fait correspondre, le point de rencontre de g' et de ω doit être indéterminé; cela exige que le plan ω contienne la droite g' . Nous désignerons par Δ la courbe fondamentale de T lieu du point P ; cette courbe est simple pour les surfaces Φ . Observons que Ω fait correspondre aux points de g' des plans formant un faisceau dont l'axe passe par P et est en général distinct de g . L'un de ces plans passe par g et par suite il existe un point P' de g' dont le point homologue est indéterminé, ce point appartient à la courbe Δ .

La courbe Δ est la seule courbe fondamentale de T en dehors de K et des droites r ; comme T est involutive, elle fait correspondre à une droite de l'espace une courbe d'ordre $4n + 1$. L'ordre de Δ est donc

$$(4n + 1)^2 - 12n^2 - 4(s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_v^2) - (4n + 1) \\ = (4n + 1)^2 - 12n^2 - 4(n^2 - 1) - (4n + 1) = 4(n + 1).$$

Il n'est pas difficile de rechercher les surfaces fondamentales de la transformation T , nous ne nous y arrêterons pas. Considérons plutôt une bisécante g de K qui soit unie pour la transformation θ . Cette droite g sera transformée en elle-même par T . Aux points de g , Ω fait correspondre les plans passant par une droite g_1 , qui est en général distincte de g . Supposons que la droite g_1 ne rencontre pas g , ce qui est le cas général. Les couples de points de g homologues dans T forment une involution qui possède deux points unis, points de rencontre de g et de la quadrique fondamentale F de Ω .

Si la droite g_1 s'appuie sur g , ce qui ne se présentera en général que si θ possède une infinité de droites unies, il existe un point de g auquel correspondent tous les points de cette droite; ce point appartient à la courbe Δ et est uni pour T .

On voit que T possède une courbe unie ou un nombre fini de points unis selon que θ possède une infinité ou un nombre fini de droites unies.

3. Envisageons un cas particulier, celui où la transformation θ' est donnée par

$$\lambda'_1 : \lambda'_2 : \lambda'_3 = \lambda_2\lambda_3 : \lambda_3\lambda_1 : \lambda_1\lambda_2.$$

La transformation θ fait correspondre aux quadriques circonscrites à K des surfaces du quatrième ordre passant doublement par K et simplement par les droites

$$a_x = a'_x = 0, \quad b_x = b'_x = 0, \quad c_x = c'_x = 0,$$

que nous désignerons par r_1, r_2, r_3 . La transformation T est actuellement du neuvième ordre et les surfaces Φ qu'elle fait correspondre aux plans de l'espace passent quatre fois par K , deux fois par chacune des droites r_1, r_2, r_3 et une fois par la courbe Δ , qui est du douzième ordre. Aux droites de l'espace, T fait correspondre des courbes du neuvième ordre s'appuyant en 14 points sur K , en deux points sur chacune des droites r_1, r_2, r_3 et en 12 points sur la courbe Δ .

La transformation θ possède quatre droites unies l_1, l_2, l_3, l_4 , d'équations

$$a_x + b_x + c_x = 0, \quad a'_x + b'_x + c'_x = 0, \quad (l_1)$$

$$-a_x + b_x + c_x = 0, \quad -a'_x + b'_x + c'_x = 0, \quad (l_2)$$

$$a_x - b_x + c_x = 0, \quad a'_x - b'_x + c'_x = 0, \quad (l_3)$$

$$a_x + b_x - c_x = 0, \quad a'_x + b'_x - c'_x = 0. \quad (l_4)$$

Sur chacune de ces droites se trouvent deux points unis pour T ; ce sont les points où ces droites coupent la quadrique fondamentale F de Ω . L'involution d'ordre deux engendrée par T possède donc huit points unis distincts.

4. Un autre cas particulier intéressant, qui est d'ailleurs un cas limite du précédent, s'obtient en prenant pour θ' la transformation

$$\lambda'_1 : \lambda'_2 : \lambda'_3 = \lambda_1 \lambda_2 : \lambda_1^2 : \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_3).$$

Aux quadriques circonscrites à K , θ fait correspondre des surfaces du quatrième ordre ϕ passant deux fois par K et une fois par chacune des droites r_1, r_2 respectivement d'équations

$$b_x = b'_x = 0, \quad c_x = c'_x = 0.$$

De plus, les surfaces ϕ touchent, le long de la droite r_2 , la quadrique Q , d'équation

$$a_x c'_x - a'_x c_x = 0. \quad (Q)$$

La transformation T est encore du neuvième ordre et fait correspondre aux plans de l'espace des surfaces Φ passant quatre fois par K , deux fois par chacune des droites r_1, r_2 et une fois par la courbe Δ d'ordre 12. De plus, la droite r_2 est tacnodale pour les surfaces Φ ; en d'autres termes, la génératrice de la quadrique Q , infiniment voisine de r_2 , est double pour ces surfaces. Aux droites de l'espace, T fait correspondre des courbes du neuvième ordre s'appuyant en 14 points sur K , en deux points sur chacune des droites r_1, r_2 et en 12 points sur la courbe Δ . De plus, ces courbes touchent la quadrique Q aux deux points d'appui sur r_2 .

La transformation θ possède trois droites unies: la droite r_2 et les droites l_1, l_2 d'équations respectives

$$2a_x + 2b_x + c_x = 0, \quad 2a'_x + 2b'_x + c'_x = 0, \quad (l_1)$$

$$2a_x - 2b_x + c_x = 0, \quad 2a'_x - 2b'_x + c'_x = 0. \quad (l_2)$$

D'une manière plus précise, si nous désignons par Q_1, Q_2 les quadriques circonscrites à K et passant la première par les droites r_2, l_1 , la seconde par les droites r_2, l_2 , les génératrices de ces quadriques, bisécantes de K , infiniment voisines de r_2 , sont unies pour θ .

La transformation T possède six points unis distincts, deux sur chacune des droites l_1, l_2, r_2 . Mais les deux points unis situés sur cette dernière droite sont d'une nature particulière. En général, les points unis d'une involution du second ordre de l'espace, supposés en nombre fini, sont des points unis parfaits, c'est à-dire qu'à une courbe passant par un de ces points, correspond une courbe touchant la première au point considéré. Au contraire, si A est un des points unis situés sur la droite r_2 , les points infiniment voisins de A situés sur la quadrique fondamentale F de Ω et respectivement sur les quadriques Q_1, Q_2 sont unis pour T , mais aux autres points du domaine de A , T fait correspondre des points distincts du même domaine. Cette particularité provient du fait que le point A est à la fois uni et fondamental (comme appartenant à la droite r_2) pour T .

On peut encore dire que l'involution engendrée par T possède huit points unis, mais ces points ne sont plus distincts.*

LIÈGE (UNIVERSITÉ),
24 OCTOBRE, 1933.

* Pour les propriétés de la transformation considérée ici, voir notre note "Sur une transformation quadratique involutive," *Mathesis* (1926), pp. 353-360.