EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*, Nos 8-9-10, 1935.

Sur une classe de courbes algébriques hyperspatiales,

par LUCIEN GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liége.

Dans un travail récent [1], nous avons rencontré une classe de courbes algébriques définies de la manière suivante : $\pi-3$ hyperquadriques $V^2_{\pi-2}$ d'un espace linéaire $S_{\pi-1}$ à $\pi-1$ dimensions, passant par un espace linéaire $\sigma_{\pi-4}$ à $\pi-4$ dimensions, ont encore en commun une surface algébrique coupant $\sigma_{\pi-4}$ suivant une courbe C_0 d'ordre $\frac{1}{2}(\pi-3)(\pi-4)$ et de genre $\frac{1}{2}(\pi-4)(\pi-5)$. Cette courbe C_0 admet ∞^1 espaces linéaires à $\pi-6$ dimensions, $\frac{1}{2}(\pi-4)(\pi-5)$ — sécants. C'est cette courbe C_0 que nous nous proposons d'étudier dans cette note. Nous l'obtenons ici comme lieu des points d'un espace linéaire S_n auxquels trois réciprocités données font correspondre trois hyperplans d'un même faisceau. Avec les nouvelles notations, cette courbe, que nous appelons Δ, est d'ordre $\frac{1}{2}n(n+1)$ et de genre $\frac{1}{2}n(n-1)$. Elle est associée à une courbe Δ' de même ordre et de même genre, dont les points correspondent aux espaces à $n-2$ dimensions $\frac{1}{2}n(n-1)$ — sécants de Δ. Les courbes Δ, Δ' jouent des rôles symétriques.

Pour $n=3$, les courbes Δ, Δ' sont des sextiques gauches de genre trois, fondamentales pour la transformation birationnelle classique établie entre les espaces ambiants au moyen des trois réciprocités.

Pour $n=4$, les courbes Δ, Δ' sont d'ordre dix et de genre six. Ces courbes admettent chacune ∞^1 plans six-sécants. Le lieu des plans six-sécants de Δ est une hypersurface d'ordre quinze, passant six fois par la courbe Δ et ayant une surface double d'ordre 85, représentant les couples de points de la courbe Δ'. Un plan six-sécant de Δ coupe cette surface suivant une courbe du treizième ordre ayant six points quintuples, aux points d'appui du plan sur Δ.

---

[1] Sur les courbes canoniques. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1935, mai et octobre.)

1. Considérons deux espaces linéaires à n dimensions Σ, Σ' liés par trois réciprocités linéairement indépendantes, non dégénérées,

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x'_k = 0, \qquad \sum_{i,k} b_{ik} x_i x'_k = 0, \qquad \sum_{i,k} c_{ik} x_i x'_k = 0,$$
$$(i, k = 0, 1, \ldots, n).$$

A un point de Σ correspond dans Σ' un espace linéaire S_{n-3} à n—3 dimensions, et inversement. Il existe ∞^1 points de Σ auxquels correspondent des espaces linéaires à n—2 dimensions; le lieu de ces points est une courbe Δ d'équations

$$\left\| \sum_i a_{ik} x_i \quad \sum_i b_{ik} x_i \quad \sum_i c_{ik} x_i \right\| = 0, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{1}$$

De même, aux points de la courbe Δ' de Σ', d'équations

$$\left\| \sum_k a_{ik} x'_k \quad \sum_k b_{ik} x'_k \quad \sum_k c_{ik} x'_k \right\| = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

correspondent des espaces linéaires à n—2 dimensions.

Pour déterminer l'ordre et le genre de la courbe Δ, commençons par observer qu'il existe trois nombres λ_1, λ_2, λ_3 tels que l'on a

$$\lambda_1 \sum_i a_{ik} x_i + \lambda_2 \sum_i b_{ik} x_i + \lambda_3 \sum_i c_{ik} x_i = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{2}$$

En éliminant les x entre ces $n+1$ équations, on obtient l'équation

$$| a_{ik}\lambda_1 + b_{ik}\lambda_2 + c_{ik}\lambda_3 | = 0, \quad (i, k = 0\ 1, \ldots, n).$$

Si nous interprétons les λ comme coordonnées des points d'un plan ϖ, cette équation représente une courbe Δ_0, d'ordre $n+1$, en général dépourvue de points multiples, birationnellement identique à Δ. La courbe Δ est donc de genre

$$\pi = \frac{1}{2} n(n-1).$$

Supprimons, dans la matrice (1), la première ligne; il nous reste l'équation d'une surface Φ. On en déduit l'existence de trois nombres λ_1, λ_2, λ_3 satisfaisant aux n dernières des équations (2). Éliminons les x entre ces n équations et

$$\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n = 0. \tag{3}$$

En posant, pour abréger,

$$\varphi_{ik} = a_{ik}\lambda_1 + b_{ik}\lambda_2 + c_{ik}\lambda_3,$$

nous obtenons une équation

$$\begin{vmatrix} \varphi_{01} & \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varphi_{0n} & \varphi_{1n} & \cdots & \varphi_{nn} \\ \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_n \end{vmatrix} = 0$$

qui représente, dans le plan ϖ, une courbe d'ordre n, Γ_n, correspondant point par point à la section de la surface Φ par l'hyperplan (3).

Lorsque les ξ varient, la courbe Γ_n décrit un système linéaire $|\Gamma_n|$, de dimension n, ayant les $\frac{1}{2}n(n+1)$ points-base simples représentés par les équations

$$\| \varphi_{0k} \quad \varphi_{1k} \quad \cdots \quad \varphi_{nk} \| = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

La courbe Δ_o passe par ces points-base. La surface Φ a l'ordre

$$n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

Désignons par X_n l'ordre de la courbe Δ et observons que la surface Φ a l'ordre X_{n-1}. Il en résulte que la courbe Δ a l'ordre

$$X_n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Les courbes Δ, Δ' *ont l'ordre* $\frac{1}{2}n(n+1)$ *et le genre* $\frac{1}{2}n(n-1)$.

2. La courbe Δ est tracée sur la surface Φ. L'hypersurface cubique V^3_{n-1} d'équation

$$\left| \sum_i a_{ik}x_i \quad \sum_i b_{ik}x_i \quad \sum_i c_{ik}x_i \right| = 0 \qquad (k = 0, 1, 2)$$

contient la courbe Δ et coupe encore Φ suivant une courbe d'ordre $n(n-2)$, intersection de Φ et de la variété cubique V^3_{n-2} d'équations

$$\left\| \sum_i a_{ik}x_i \quad \sum_i b_{ik}x_i \quad \sum_i c_{ik}x_i \right\| = 0 \qquad (k = 1, 2).$$

Désignons par L cette nouvelle courbe. Dans la représentation de Φ sur le plan ϖ, aux sections de Φ par les hypersurfaces cubiques correspondent les courbes d'ordre $3n$ passant trois fois par les $\frac{1}{2}n(n+1)$ points-base de $|\Gamma_n|$. Par conséquent, à la courbe L correspond dans ϖ une courbe d'ordre $2n-1$ passant deux fois par les points-base de $|\Gamma_n|$. Cette courbe rencontre Δ_o, en dehors de ces points-base, en n^2-1 points. Par suite, la courbe L rencontre la courbe Δ_0, en dehors de ces points-base, en n^2-1 points. Par suite, la courbe L rencontre la courbe Δ en n^2-1 points.

3. Faisons suivre la matrice (1) de $n-2$ colonnes de constantes, c'est-à-dire considérons l'équation

$$\left| \sum_i a_{ik} x_i \quad \sum_i b_{ik} x_i \quad \sum_i c_{ik} x_i \quad \xi_k^{(1)} \ldots \xi_k^{(n+2)} \right| = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n). \qquad (4)$$

Nous obtenons une hypersurface cubique V_{n-1}^3 passant par la courbe Δ. Les hypersurfaces V_{n-1}^3 engendrent un système continu $\infty^{3(n-2)}$; parmi ces hypersurfaces, il y en a $\binom{n+1}{n-2} = \binom{n+1}{3}$ linéairement indépendantes; elles appartiennent donc à un système linéaire de dimension $\binom{n+1}{3}-1$.

La variété V_{n-1}^3 d'équation (4) est le lieu des espaces S_{n-3} que les trois réciprocités données font correspondre aux points du plan

$$\Sigma \xi_k^{(1)} x'_k = 0, \ldots, \Sigma \xi_k^{(n-2)} x'_k = 0$$

de Σ'.

En faisant suivre la matrice (1) de $n-3$ colonnes de constantes, on obtient les équations d'une variété à $n-2$ dimensions, d'ordre six, V_{n-2}^6, contenant la courbe Δ et par laquelle passent ∞^1 hypersurfaces V_{n-1}^3 formant un faisceau. On en conclut qu'aux points d'une droite de Σ', les trois réciprocités données font correspondre des espaces linéaires S_{n-3} engendrant une variété V_{n-2}^3 ne contenant pas la courbe Δ. Cette variété forme, avec une variété V_{n-2}^6, l'intersection complète de deux hypersurfaces V_{n-1}^3.

Les équations

$$\left\| \sum_i a_{ik} x_i \quad \sum_i b_{ik} x_i \quad \sum_i c_{ik} x_i \quad \eta'_k \right\| = 0,$$

où les η_k sont des constantes, représentent une surface Φ d'ordre $\frac{1}{2} n (n-1)$ passant par Δ. Cette surface est représentable point par point sur un plan; à la section de Φ par l'hyperplan $\xi_x = 0$ correspond la courbe d'ordre n

$$\left| \begin{array}{ccccc} \varphi_{00} & \varphi_{10} & \cdots & \varphi_{n0} & \eta_0 \\ \varphi_{01} & \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{n1} & \eta_1 \\ . & . & \cdots & . & . \\ \varphi_{0n} & \varphi_{1n} & \cdots & \varphi_{nn} & \eta_n \\ \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_n & 0 \end{array} \right| = 0,$$

formant un système linéaire ∞^n ayant $\frac{1}{2} n (n+1)$ points-base.

Par un raisonnement analogue à celui qui a été fait plus haut (n° 2), on voit qu'une hypersurface V^3_{n-1} ne contenant pas la surface Φ coupe celle-ci suivant la courbe Δ et une courbe d'ordre $n\,(n-2)$, appartenant à une variété V^3_{n-2}; cette courbe appartient au système linéaire $|L|$ et coupe Δ en n^2-1 points.

4. Désignons par σ_{n-2} les espaces linéaires à $n-2$ dimensions qui correspondent dans Σ aux points de Δ', et par σ'_{n-2} ceux de Σ' qui correspondent aux points de Δ'. Soient P' un point de Δ', $\bar{\sigma}_{n-2}$ l'espace qui lui correspond dans Σ.

A un point de σ_{n-2}, les trois réciprocités données font correspondre trois hyperplans de Σ' passant par P'. Si l'on exprime que ces trois hyperplans ont en commun un espace S_{n-2}, on obtient une matrice à trois colonnes et n lignes de formes linéaires par rapport à $n-1$ variables homogènes; cette matrice s'annule pour $\frac{1}{2}\,n\,(n-1)$ points et par suite l'espace σ_{n-2} s'appuie en $\frac{1}{2}\,n\,(n-1)$ points sur Δ. On en conclut que les espaces σ_{n-2} (ou σ'_{n-2}) s'appuient en $\frac{1}{2}\,n\,(n-1)$ points sur Δ (ou Δ') et que par un point de Δ (ou de Δ') passent $\frac{1}{2}\,n\,(n-1)$ espaces σ_{n-2} (ou σ'_{n-2}).

Les ∞^1 espaces σ_{n-2} (ou σ'_{n-2}) engendrent une hypersurface Ω_{n-1} (ou Ω'_{n-1}). Pour déterminer l'ordre de Ω_{n-1}, considérons une droite s de Σ; aux points de cette droite correspondent ∞^1 espaces S_{n-3} engendrant une variété V'^3_{n-1} coupant Δ' en n^2-1 points; par suite, il y a n^2-1 espaces σ_{n-2} s'appuyant sur s et Ω_{n-1} est d'ordre n^2-1. Il en est de même de Ω'_{n-1}.

La variété Ω_{n-1} (ou Ω'_{n-1}) passe $\frac{1}{2}\,n\,(n-1)$ fois par Δ (ou par Δ').

La courbe Δ admet ∞^1 espaces linéaires σ_{n-2} la rencontrant en $\frac{1}{2}\,n\,(n-1)$ points; ces espaces engendrent une hypersurface Ω_{n-1} d'ordre n^2-1 pour laquelle la courbe Δ est multiple d'ordre $\frac{1}{2}\,n\,(n-1)$.

5. Reprenons le point P' de Δ' et l'espace $\bar{\sigma}_{n-2}$ correspondant. A un plan de $\bar{\sigma}_{n-2}$, ne s'appuyant pas sur Δ, correspond une variété V^3_{n-1} ayant un point triple en P', puisque lieu d'espaces S_{n-3} passant par ce point. Sur une surface Φ' quelconque, cette variété conique V^3_{n-1} découpe, en dehors de Δ', une courbe L' ayant un point double en P'. Il en résulte qu'aux droites de $\bar{\sigma}_{n-2}$ correspondent des courbes L' ayant un point double en P' et rencontrant encore Δ' en n^2-3 points. Par suite, il y a n^2-3 espaces σ_{n-2}, distincts de $\bar{\sigma}_{n-2}$, s'appuyant sur une droite de cet espace. On voit donc que les espaces σ_{n-2} rencontrent l'un d'entre eux suivant des espaces linéaires à n—4 dimensions, engendrant une variété à n—3 dimensions, d'ordre n^2—3.

Cette propriété peut également s'établir de la manière suivante : Un espace S_3 coupe Ω_{n-1} suivant une surface réglée d'ordre n^2—1 dont les génératrices sont marquées par les espaces σ_{n-2}. Une génératrice de cette surface contient n^2—3 points doubles de celle-ci; donc il y a n^2—3 points de cette génératrice par chacun desquels passent deux espaces σ_{n-2} distincts.

La section de la variété Ω_{n-1} par un plan est une transformée birationnelle de Δ'; ses points doubles sont les points du plan par lesquels passent deux espaces σ_{n-2} distincts. Ces points doubles sont au nombre de $\frac{1}{2}(n+1)(n^3-n^2-5n+6)$. Par suite les espaces à n—4 dimensions communs aux couples d'espaces σ_{n-2} forment une variété à n—2 dimensions, d'ordre $\frac{1}{2}(n+1)(n^3-n^2-5n+6)$, double pour l'hypersurface Ω_{n-1}.

Liége, le 3 octobre 1935.

M. HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, 112, rue de Louvain, Bruxelles.