EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*,
N° 2, pp. 37-39, 1935.

Sur les surfaces du quatrième ordre passant par six droites,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Dans une note récente (1), M. Todd a étudié le système des surfaces du quatrième ordre passant par six droites de l'espace et il a montré que si ces six droites appartiennent à un complexe linéaire; ce système de surfaces est composé au moyen d'une involution du second ordre de l'espace. Nous nous proposons d'établir que, réciproquement, si le système formé par les surfaces du quatrième ordre passant par six droites de l'espace est composé au moyen d'une involution du second ordre, ces six droites appartiennent à un complexe linéaire.

1. Soient $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ six droites de l'espace ne se rencontrant pas deux à deux, n'appartenant pas à une même surface cubique, quatre quelconques d'entre-elles n'appartenant pas à une même quadrique. Les surfaces du quatrième ordre F passant par ces six droites forment un système linéaire $|F|$, de dimension quatre et de degré quatre. Deux surfaces F ont encore en commun une courbe variable C, d'ordre dix et de genre trois, s'appuyant en six points (variables) sur chacune des droites $a_1, a_2, \dots a_6$.

Supposons que le système $|F|$ soit composé au moyen d'une involution I_2 d'ordre deux.

Rapportons projectivement les surfaces F aux hyperplans d'un espace linéaire S_4 à quatre dimensions; aux couples de l'involution I_2 correspondent dans S_4 les points d'une hyperquadrique V_3^2.

L'hyperquadrique V_3^2 ne peut être spécialisée. Supposons en effet qu'elle possède un point double R; elle contient alors deux séries de ∞^1 de plans $|\rho_1|$, $|\rho_2|$. La section de V_3^2 par un hyperplan passant par R se compose d'un plan ρ_1 et d'un plan ρ_2; par conséquent, aux plans ρ_1, ρ_2 correspondent, dans l'espace S_3 contenant $|F|$, des surfaces d'ordre inférieur à quatre, ce qui est impossible. Si l'hyperquadrique V_3^2 possédait une droite double r, elle contien-

(1) J.-A. TODD, Configurations définited by six lines in space of three dimensions. (*Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1932-1933, t. 29, pp. 52-68.)

drait une infinité de plans ρ et à ces plans correspondraient de même des surfaces d'ordre inférieur à quatre, ce qui est impossible.

2 L'hyperquadrique V_3^2 étant générale, contient un système ∞^3 irréductible de droites. A ces droites correspondent dans S_3, ∞^3 courbes C_1 formant un système irréductible. A une section plane de V_3^2 correspond, dans S_3, une courbe C; en particulier, à une section plane réductible en deux droites de V_3^2 correspond une courbe C formée de deux courbes C_1. Il en résulte que les courbes C_1 sont des courbes du cinquième ordre s'appuyant en trois points sur chacune des droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$.

Considérons une surface F générale et soit ϖ l'hyperplan de S_4 qui lui correspond. La surface F est birationnellement identique à la quadrique double (ϖ, V_3^2). Cette quadrique double possède une courbe de diramation du huitième ordre, rencontrant les génératrices rectilignes de la quadrique en quatre points. On en conclut que les courbes C_1 sont elliptiques et que, sur une surface F, se trouvent deux faisceaux de quintiques C_1 bisécantes.

On sait que les trisécantes d'une quintique elliptique appartiennent à un complexe linéaire(1); le théorème que nous voulions établir est donc démontré.

3. On peut observer qu'une surface du quatrième ordre assujettie à passer par six droites a en général le nombre-base égal à sept; les six droites et une section plane de la surface forment une base dont le déterminant est égal à $7(-2)^6$.

Au contraire, si la surface possède en outre une quintique elliptique s'appuyant en trois points sur les six droites données, cette courbe est indépendante des six droites et d'une section plane.

---

(1) Les trisécantes d'une quintique elliptique de S_3 forment une surface du cinquième ordre passant doublement par la courbe; c'est donc une réglée elliptique. Dans la représentation des droites de S_3 sur une hyperquadrique Q de S_5, à la manière de Klein, il correspond à cette réglée une courbe elliptique d'ordre cinq, appartenant nécessairement à un hyperplan.

Signalons en passant cette propriété : sur une surface cubique passant par une quintique elliptique se trouvent deux droites ne rencontrant pas cette courbe. Lorsque la surface cubique varie dans un système linéaire ∞^3, ces deux droites engendrent un complexe linéaire; lorsque la surface varie dans un réseau, elles engendrent une congruence bilinéaire; lorsque la surface varie dans un faisceau, elles engendrent une demi-quadrique, sur laquelle est tracée la courbe rationnelle du quatrième ordre qui, avec la quintique, forme la base de ce faisceau.

Le nombre-base de la surface est égal à huit ; les six droites, une section plane et la quintique forment une base dont le déterminant est égal à 7.

4. Dans son travail cité plus haut, M. Todd a démontré que la transformation birationnelle T, génératrice de l'involution I_2, fait correspondre aux plans de l'espace des surfaces d'ordre 19, ayant comme lignes quintuples les six droites a_1, a_2, ..., a_6 ; comme lignes simples les 30 droites s'appuyant sur quatre des six droites a_1, a_2, ..., a_6 ; comme lignes triples les six cubiques gauches ayant ces six droites comme bisécantes. Par conséquent, le système linéaire complet $|\Phi|$, formé par les surfaces d'ordre vingt ayant a_1, a_2, ..., a_6 comme droites quintuples, les trente droites s'appuyant sur quatre de ces six droites comme droites simples, les six cubiques gauches dont il vient d'être question comme courbes triples, est transformé en lui-même par T. Le système $|F|$ n'est autre que le quatrième adjoint du système $|\Phi|$.

M. HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, 112, rue de Louvain, Bruxelles