

**Recherches sur les involutions cycliques appartenant
à une surface algébrique,**

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

(Quatrième communication.)

Dans plusieurs notes récentes, nous avons étudié les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. Nous avons étudié trois espèces de points unis : les points unis parfaits, les points unis non parfaits symétriques et les points unis non parfaits ayant, dans leur domaine du premier ordre, un point uni parfait. Si l'involution est d'ordre premier p et si l'on construit une surface normale image de l'involution, aux points unis de ces trois catégories correspondent respectivement sur la surface image des points multiples d'ordre p à cônes tangents rationnels; des points doubles biplanaires auxquels sont infiniment voisins successifs $\frac{1}{2}(p-3)$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire; des points multiples d'ordre $\frac{1}{2}(p+1)$ dont les cônes tangents se composent d'un cône rationnel d'ordre $\frac{1}{2}(p-1)$ et d'un plan coupant le cône suivant une seule droite.

(1) Recherches sur les involutions appartenant à une surface algébrique. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, Cl. des Sc., 1930, pp. 450-467; 1931, pp. 1131-1150, 1356-1364.)

Les genres arithmétiques, les genres linéaires et les invariants de Zeuthen-Segre de la surface portant l'involution et de la surface image de l'involution sont liés par certaines relations que nous avons établies dans le cas où seuls des points unis des deux premières catégories se présentent ⁽¹⁾. Nous complétons nos recherches en considérant les points de la troisième catégorie. Cela nous permet de confirmer un résultat que nous avons établi antérieurement sur l'existence d'involutions cycliques rationnelles, appartenant à des surfaces non rationnelles ⁽²⁾. Ajoutons que les formules établies auraient pu se déduire des relations obtenues par M. Severi dans le cas de correspondances algébriques d'indices quelconques entre deux surfaces algébriques ⁽³⁾; il nous a paru utile de les établir directement.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p , d'ordre premier p supérieur à deux, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Désignons par T la transformation birationnelle de F en elle-même, génératrice de l'involution I_p . Construisons sur F un système linéaire $|C_0|$, dépourvu de points-base, composé au moyen de l'involution I_p et appartenant à un système linéaire complet $|C|$, plus ample que $|C_0|$, transformé en lui-même par T . Nous avons montré que cette construction est possible et peut être faite de telle manière que la dimension de $|C_0|$ soit aussi grande qu'on le veut. On peut en outre supposer que $|C_0|$ n'est pas composé au moyen d'une autre involution.

Rapportons projectivement les courbes C_0 aux hyperplans

(1) Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique. (*Bull. de la Soc. math. de France*, 1919, pp. 1-16).

(2) Sur l'existence d'involutions rationnelles n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique. (*Bull. des Sciences math.*, 1933, pp. 7-14.)

(3) Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica. (*Rend. R. Istituto Lombardo*, 1903, pp. 495-511.)

d'un espace linéaire S_r à r dimensions, r étant la dimension de $|C_0|$. A la surface F correspond, dans S , une surface Φ image de l'involution I_p . Nous désignerons par Γ les sections hyperplanes de Φ , par π leur genre, par n l'ordre de Φ . Les courbes C_0 et C sont alors de genre $p(\pi - 1) + 1$ et de degré pn .

Supposons qu'un des points unis A de I_p présente la structure suivante : le point A est uni non parfait et possède dans son domaine du premier ordre un point uni parfait A_1 . Parmi les directions issues de A sur F , il y en a deux qui sont unies pour T ; l'une est la direction AA_1 , l'autre sera désignée par AA_2 , A_2 étant le point du domaine du premier ordre de A dans cette direction.

Posons $p = 2m + 1$. Les courbes C_0 assujetties à passer par A ont en ce point la multiplicité $m + 1$ et possèdent en A_1 la multiplicité m , en A_2 un point simple. D'une manière plus précise, les courbes envisagées ont en commun une suite de m points simples infiniment voisins successifs dont le premier est A_2 .

Au point de diramation A' de Φ , homologue du point uni A , cette surface possède un point multiple d'ordre $m + 1$ dont le cône tangent se compose d'un cône irréductible d'ordre m et d'un plan coupant le cône précédent suivant une seule droite (nous supposons $r > m$). Le voisinage du point A' , sur la surface Φ , est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à l'ensemble d'une courbe γ_1 , rationnelle, de degré $-(m + 1)$, et d'une courbe rationnelle γ_2 , de degré -2 , rencontrant la première en un point ⁽¹⁾.

2. Si l'on désigne par $|\bar{K}|$ le système canonique de Φ et si l'on considère le nombre des intersections des courbes $\bar{K}$ avec les courbes Γ d'une part, les courbes $\Gamma - \gamma_1 - \gamma_2$ (qui sont de genre $\pi - m$ et de degré $n - m - 1$) d'autre part, on

(1) Sur l'existence d'involutions rationnelles..., *loc. cit.*

voit que les courbes $\bar{K}$ rencontrent la courbe γ_1 en $m - 1$ points, mais ne rencontrent pas la courbe γ_2 .

Aux courbes $\bar{K}$ correspondent sur F des courbes canoniques K , transformées en elles-mêmes par T , et ayant des points multiples d'ordre $m - 1$ en A et A_1 . Si nous désignons par $\pi^{(1)}$ le genre linéaire de Φ et par $p^{(1)}$ celui de F , nous avons donc

$$p^{(1)} - 1 = p(\pi^{(1)} - 1) + 2(m - 1)^2 + \Delta_1, \quad (1)$$

Δ_1 étant un terme qui provient des points unis de I_p distincts de A .

3. Recherchons maintenant l'influence du point A sur la relation entre les invariants de Zeuthen-Segre I^* de Φ et I de F .

Calculons l'invariant I^* au moyen d'un faisceau de sections hyperplanes Γ de Φ . La courbe Γ de ce faisceau passant par A' est équivalente à l'ensemble de trois courbes $\Gamma - \gamma_1 - \gamma_2$, γ_1 , γ_2 ayant deux-à-deux $m + 2$ points communs; par suite, cette courbe Γ équivaut à $m + 2$ courbes Γ ayant un point double. S'il existe dans le faisceau considéré δ courbes Γ ayant un point double en un point simple de Φ et si les courbes du faisceau passant par les points de diramation de Φ distincts de A' sont équivalentes à δ'_1 courbes ayant des points doubles, on a

$$I^* = \delta + \delta'_1 + m + 2 - n - 4\pi.$$

Calculons l'invariant I de F au moyen du faisceau formé par les courbes C_0 transformées des courbes Γ qui viennent d'être considérées. Ce faisceau contient δ courbes ayant chacune p points doubles, ce qui équivaut à $p\delta$ courbes ayant un point double. La courbe C_0 du faisceau passant par A équivaut à $m(2m - 1)$ courbes ayant un point double ⁽¹⁾. Supposons, enfin, que les courbes C_0 du faisceau passant par les points

⁽¹⁾ Cette formule est établie à la fin de cette note.

unis de I_p distincts de A soient équivalentes à δ_1 courbes ayant un point double. On a

$$I = p\delta + \delta_1 + m(2m - 1) - pn - 4p(\pi - 1) - 4.$$

L'élimination de δ (et par suite de n, π) entre les deux relations trouvées donne

$$I = pI^* + \Delta_2 - 2(3m + 1) + 4(p - 1), \quad (2)$$

$$\text{où } \Delta_2 = \delta_1 - p\delta'_1.$$

4. Désignons par p_a le genre arithmétique de F , par π_a celui de Φ . En utilisant la formule

$$p^{(4)} + I = 12p_a + 9$$

de Noether, on déduit des relations (1) et (2),

$$12(p_a + 1) = 12p(\pi_a + 1) + \Delta + 2m(m - 5),$$

où $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ est un indice qui ne dépend que des points unis de I_p distincts de A .

La relation précédente peut encore s'écrire

$$12(p_a + 1) = 12p(\pi_a + 1) + \Delta + \frac{1}{2}(p - 1)(p - 11). \quad (3)$$

5. Supposons que l'involution I_p possède α_0 points unis parfaits, α_1 points unis symétriques (points unis non parfaits qui donnent naissance à des points de diramation formés d'une suite de $\frac{1}{2}(p - 1)$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire) ⁽¹⁾ et α_2 points unis du type considéré plus haut. En tenant compte de nos résultats antérieurs ⁽²⁾, les relations

(1) Nous avons considéré ces points dans la seconde note de nos « Recherches sur les involutions cycliques... », *loc. cit.*

(2) Voir nos « Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini... », *loc. cit.*

entre les genres arithmétiques, les genres linéaires et les invariants de Zeuthen-Segre de F et Φ prennent la forme

$$12(p_a + 1) = 12p(\pi_a + 1) + (p - 1)(p - 5)\alpha_0 - (p^2 - 1)\alpha_1 \\ + \frac{1}{2}(p - 1)(p - 11)\alpha_2,$$

$$p^{(4)} - 1 = p(\pi^{(4)} - 1) + (p - 2)^2\alpha_0 + \frac{1}{2}(p - 3)^2\alpha_2,$$

$$1 + 4 = p(I^* + 4) - (2p - 1)\alpha_0 - (p^2 - 1)\alpha_1 - (3p - 1)\alpha_2.$$

6. Observons que pour $p = 3$, donc $m = 1$, les points unis considérés ici deviennent des points unis symétriques. Effectivement, on a bien, dans ce cas,

$$-(p^2 - 1) = \frac{1}{2}(p - 1)(p - 11), \quad \frac{1}{2}(p - 3)^2 = 0, \\ -(p^2 - 1) = -(3p - 1).$$

Comme seconde vérification, appliquons les formules précédentes à l'involution rationnelle d'ordre sept appartenant à la surface représentant les couples de points d'une quartique de Klein ⁽¹⁾. Cette involution possède six points unis du type envisagé ⁽²⁾; on a $p_a = 0$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 6$; d'où l'on déduit $\pi_a = 0$.

7. Il nous reste à établir la formule utilisée plus haut dans le calcul de l'invariant de Zeuthen-Segre de la surface F .

Adoptons de nouvelles notations et considérons, sur la surface F , un faisceau linéaire $|C|$ de courbe C de genre π , ayant n points-base. Pour établir la formule permettant de calculer l'invariant de Zeuthen-Segre I de F , C . Segre considère un second faisceau linéaire $|C'|$, de genre π' et de degré n' de F et la courbe T , lieu des points de contact des courbes C , C' .

(1) Voir notre note « Sur une involution rationnelle, douée de trois points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique de genre trois ». (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, Cl. des Sc., 1921, pp. 653-665, 694-702.)

(2) Sur l'existence d'involutions rationnelles..., *loc. cit.*

Si μ est le nombre de points communs à une courbe C et à une courbe C' , les courbes C découpent, sur la courbe T , une série linéaire d'ordre $2(\mu + \pi - 1)$. C. Segre démontre que les points doubles de cette série sont les points où les courbes C ont un point double, ou les points où deux courbes C , C' s'osculent, ou enfin les points-base de $|C'|$. Si δ est le nombre de courbes C ayant un point double, l'expression

$$I = \delta - n - 4\pi$$

ne dépend pas du faisceau $|C|$ considéré ⁽¹⁾.

Supposons qu'il existe, dans le faisceau $|C|$, une courbe C_1 ayant en un point A distinct des points-base de $|C|$, un point multiple d'ordre $m + 1$ auquel est infiniment voisin un point A_1 multiple d'ordre m . La courbe C_1 a le genre $\pi - m^2$; il y a $2(\mu + \pi - m^2 - 1)$ courbes C' touchant la courbe C_1 et par suite la courbe C_1 rencontre la courbe T en $2m^2$ points confondus en A . Il en résulte que la courbe T possède en A un point multiple d'ordre m auquel est infiniment voisin un point A_1 multiple d'ordre $m - 1$. Sur chacune des $m - 1$ branches de T passant par A_1 , le point A équivaut à $2m$ points doubles de la série découpée par les courbes C sur la courbe T ; sur la dernière branche de T , en A , ce point équivaut à m points doubles de cette série. Par conséquent, la courbe C_1 équivaut à $2m(m - 1) + m = m(2m - 1)$ courbes C ayant un point double; ce que nous voulions établir.

Liège, le 5 mars 1935.

⁽¹⁾ C. SEGRE, *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche* (*Atti della R. Accad. di Torino*, 1895, vol. 31). Voir également F. ENRIQUES, *Sulla classificazione delle superficie algebriche particolarmente di genere zero*; *Lezioni raccolte dal dott. L. Campedelli* (*Rend. del Seminario matematico della Facoltà di Scienze della R. Università di Roma*, série 3, vol. I, 1934).