Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 1er juin 1935, pp. 573-577, n° 6.

Une observation sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces algébriques,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Considérons une correspondance rationnelle $(1, n)$ entre deux surfaces algébriques Φ, F. M. Castelnuovo a démontré qu'à une courbe canonique de Φ correspond sur F une courbe qui, augmentée de la courbe unie de la correspondance, donne une courbe canonique de F. Supposons que l'involution I_n, d'ordre n, déterminée sur F par la correspondance, n'ait qu'un nombre fini de points unis. Dans ces conditions, à une courbe canonique de Φ correspond une courbe canonique de F et il semblerait à première vue que l'on peut en déduire que si Φ possède une courbe canonique d'ordre zéro ($p_g = 1$), il en est de même de F. Or, il n'en est rien; il peut exister des points de Φ (ou courbes exceptionnelles) auxquels correspondent sur F des courbes appartenant au système canonique de cette surface (totalement ou partiellement) et qui ne sont pas exceptionnelles. C'est ce que nous montrons par un exemple. Précisément, nous considérons sur une surface F de genre géométrique $p_g = 4$, une involution d'ordre treize ayant trois points unis, dont l'image est une surface Φ possédant une courbe canonique d'ordre zéro ($p_g = 1$). Il existe une courbe canonique de F sur laquelle l'involution I_{13} détermine une involution rationnelle; à cette courbe correspond un point simple de la surface Φ.

De l'exemple que nous étudions résulte qu'*étant donnée une involution appartenant à une surface algébrique, il peut exister sur cette surface des courbes appartenant (totalement ou non) au système canonique et auxquelles correspondent des points simples de la surface image de l'involution.*

1. Considérons l'homographie cyclique H de période 13

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^{10} x_3 : x^8 x_4,$$

où ε est une racine primitive treizième de l'unité. La surface F, d'équation

$$a_1 x_1^4 x_2 + a_2 x_2^4 x_3 + a_3 x_3^4 x_1 + a_4 x_1 x_2 x_3 x_4^2 + a_5 x_4^5 = 0$$

est transformée en elle-même par cette homographie H. Précisément, H détermine, sur la surface F_1, une involution I_{13}, d'ordre treize, n'ayant que trois points unis, à savoir les points O_1 (1, o, o, o,), O_2(o, 1, o, o), O_3(o, o, 1, o).

Pour obtenir un modèle projectif de la surface Φ, image de l'involution I_{13}, rapportons projectivement les surfaces

$$\lambda_1 x_1^4 x_2 + \lambda_2 x_2^4 x_3 + \lambda_3 x_3^4 x_1 + \lambda_4 x_1 x_2 x_3 x_4^2 = 0$$

aux plans de l'espace en posant

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = x_1^4 x_2 : x_2^4 x_3 : x_3^4 x_1 : x_1 x_2 x_3 x_4^2.$$

La surface Φ a alors pour équation

$$X_1 X_2 X_3 (a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4)^2 - a_5^2 X_4^5 = 0.$$

C'est une surface du cinquième ordre possédant trois points doubles O_1' (1, o, o, o), O_2'(o, 1, o, o), O_3' (o, o, 1, o) et une droite double r d'équations

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 = 0, \quad X_4 = 0.$$

2. Le point O_1' est double biplanaire pour Φ et la droite $X_2 = X_3 = 0$, commune aux deux plans tangents à cette surface en O_1', coupe Φ en cinq points confondus en O_1' ; par conséquent, la surface Φ possède un point double infiniment voisin de O_1'.

Pour examiner la question de plus près, opérons la transformation quadratique

$$\frac{X_1}{Y_4^2} = \frac{X_2}{Y_1 Y_2} = \frac{X_3}{Y_1 Y_3} = \frac{X_4}{Y_1 Y_4};$$

à la surface Φ correspond la surface

$$Y_2 Y_3 (a_1 Y_4^2 + a_2 Y_1 Y_2 + a_3 Y_1 Y_3 + a_4 Y_1 Y_4)^2 - a_5^2 Y_1^3 Y_4^3 = 0. \quad (1)$$

Au point infiniment voisin de O_1' sur la droite $X_2 = X_3 = 0$ correspond le point $Y_1 = Y_2 = Y_3 = 0$. Ce point est double biplanaire par la surface (1) et la droite $Y_2 = Y_3 = 0$, commune aux plans tangents, rencontre la surface en trois points confondus au point considéré. Par conséquent, ce point est double biplanaire ordinaire pour la surface (1).

Au point O_1', la surface Φ a un point double biplanaire auquel est infiniment voisin un point double biplanaire ordinaire. Les points O_2', O_3' présentent la même singularité.

Le plan

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 = 0 \quad (2)$$

ne rencontre plus la surface Φ en dehors de la droite double r. Il en résulte que la surface Φ possède une droite double r à laquelle sont infiniment voisines sucessives dans le plan (2) une droite double r' et une droite simple r''.

3. La surface F, du cinquième ordre, est dépourvue de points multiples; par conséquent elle a les genres

$$p^{(1)} = 6, \quad p_a = p_g = 4, \quad P_2 = 9, \quad P_3 = 20, \dots$$

Les adjointes de la surface Φ sont des plans; les points doubles O_1', O_2', O_3' sont sans influence sur ces adjointes; par contre celles-ci doivent passer par les droites doubles r, r'. La surface Φ possède donc un seul plan adjoint, le plan (2), et la droite r'' est une droite exceptionnelle.

Les quadriques bi-adjointes de la surface Φ doivent passer doublement par chacune des droites r, r'; par conséquent, cette surface a une seule quadrique bi-adjointe, formée du plan (2) compté deux fois. De même, la surface Φ a une seule surface cubique tri-adjointe, formée du plan (2) compté trois fois, et ainsi de suite.

La surface Φ, image d'une involution appartenant à une surface régulière, est elle-même régulière; ses genres sont donc

$$p_a = p_g = 1, \qquad P_2 = P_3 = P_4 = \cdots = 1.$$

4. Nous allons montrer que la surface Φ peut, par une transformation birationnelle, se ramener à une surface du quatrième ordre n'ayant qu'un nombre fini de points doubles.

Posons, pour abréger,

$$\varphi \equiv a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4$$

et considérons la transformation

$$Y_1 : Y_2 : Y_3 : Y_4 = X_4^2 : X_2\varphi : X_3\varphi : X_4\varphi,$$

obtenue en rapportant projectivement aux plans de l'espace les quadriques passant par O_1' et touchant le plan (2) le long de la droite r. L'inverse de cette transformation a pour équations

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = Y_4^2 - Y_1\psi : a_1 Y_1 Y_2 : a_1 Y_1 Y_3 : a_1 Y_1 Y_4,$$

où nous posons

$$\psi \equiv a_2 Y_2 + a_3 Y_3 + a_4 Y_4.$$

A la surface Φ correspond la surface du quatrième ordre Φ′ d'équation

$$Y_2 Y_3 (Y_4^2 - Y_1\psi) - a_1 a_5^2 Y_1^3 Y_4 = 0.$$

La surface Φ′ est dépourvue de courbes multiples et possède quatre points doubles biplanaires, à savoir les points $Y_1 = Y_3 = Y_4 = 0$, $Y_1 = Y_2 = Y_4 = 0$, $Y_1 = \varphi = Y_4 = 0$, $Y_1 = Y_2 = Y_3 = 0$ Cette surface est donc de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

Observons que dans la correspondance entre les surfaces F et Φ, à la courbe canonique découpée sur la première surface par le plan $x_1 = 0$, correspond sur la seconde la droite exceptionnelle r''. Dans la correspondance entre les surfaces Φ et Φ', à la droite r'' correspond, sur la surface Φ', le point simple $Y_2 = Y_3 = Y_4 = 0$.

La surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) Φ est donc l'image d'une involution n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface F de genres $p_a = p_g = 4$ [1].

Liége, le 18 mai 1935.

---

[1] On peut généraliser l'exemple précédent de la manière suivante. Considérons la surface F d'équation

$$a_1 x_1^n x_2 + a_2 x_2^n x_3 + a_3 x_3^n x_1 + a_4 x_1 x_2 x_3 x_4^{n-2} + a_5 x_4^{n+1} = 0$$

et l'homographie H,

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^\lambda x_3 : \varepsilon^\mu x_4,$$

où ε est une racine primitive p-ième de l'unité. La surface F est transformée en elle-même par l'homographie H dans les conditions suivantes :

1) $n = 3\nu,\quad p = 3\nu(3\nu - 1) + 1,\quad \lambda = (3\nu - 1)^2 + 1,$
$\mu = \nu(3\nu - 2) + 1;$

2) $n = 3\nu + 1,\quad p = 3\nu(3\nu + 1) + 1,\quad \lambda = 9\nu^2 + 1,$
$\mu = 6\nu^2 + \nu + 1.$

Dans les deux cas, on obtient sur la surface F une involution I_p, d'ordre p, ayant trois points unis et dont l'image est la surface

$$X_1 X_2 X_3 (a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4)^{n-2} - (-a_5)^{n-2} X_4^{n+1} = 0.$$

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.