Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*
Nos 4-5, 1935.

# Une observation sur les involutions d'ordre huit et de genres un appartenant à une surface de genres un,

par Lucien GODEAUX, Professeur à l'Université de Liége.

Dans nos recherches sur les involutions de genres un ($p_a = P_4 = 1$) appartenant à une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), nous avons considéré plusieurs involutions du huitième ordre [1]. Étant donnée sur une surface F de genres un une involution cyclique $I_n$ d'ordre $n$, appelons point uni multiple d'ordre $\nu$ ou point uni $\nu$-uple de $I_n$ un point de la surface qui compte pour $\nu$ parmi les points du groupe de $I_n$ qui le contient. Nous avons montré qu'une involution cyclique du quatrième ordre, appartenant à F, possédait quatre points unis quadruples et quatre points unis doubles (formant deux groupes de l'involution). Nous avons ensuite établi que si une involution d'ordre huit et de genres un, appartenant à F, possédait un groupe formé de huit points coïncidents, elle était composée au moyen de trois involutions cycliques du quatrième ordre ayant en commun deux ou quatre points unis quadruples. D'un autre côté, nous avons, en étudiant les involutions engendrées par des transformations cycliques n'ayant deux-à-deux aucun point uni commun, rencontré une involution du huitième ordre engendrée par trois transformations birationnelles involutives de la surface F en elle-même. Dans cette note, nous nous proposons d'étudier une troisième espèce d'involution du huitième ordre ne rentrant pas dans les types précédents. Cette involution est composée au moyen de deux involutions cycliques du quatrième ordre, tout point uni quadruple de l'une étant point uni double de l'autre. Nous montrerons l'existence de ces involutions par un exemple.

**1.** Soit F une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) contenant deux involutions cycliques $I_4$, $I'_4$, d'ordre quatre. Désignons par $T_1$, $T_2$ les transformations birationnelles, de période quatre, de

[1] Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un (*Annales de l'École normale supérieure*, 1914, pp. 357-430; 1919, pp. 51-70). — Sur les involutions d'ordre huit appartenant à une surface de genres un (*Mémoires in-8o de l'Acad. roy. de Belgique*, 1924, pp. 1-33).

la surface F en elle-même, génératrices des involutions $I_4$, $I'_4$. Nous supposerons que l'on a

$$T_1^2 = T_2^2, \quad T_1 T_2 = T_2 T_1.$$

L'involution $I_4$ possède quatre points unis quadruples $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{21}$, $A_{22}$ et quatre points unis doubles $A'_{11}$, $A'_{12}$, $A'_{21}$, $A'_{22}$ formant deux groupes $A'_{11} + A'_{12}$, $A'_{21} + A'_{22}$ de l'involution. L'involution $I'_4$ possède quatre points unis quadruples que nous supposerons être $A'_{11}$, $A'_{12}$, $A'_{21}$, $A'_{22}$ et quatre points unis doubles que nous supposerons être $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{21}$, $A_{22}$, ces quatre points formant deux groupes $A_{11} + A_{12}$, $A_{21} + A_{22}$ de l'involution.

En appliquant à un point P de la surface F les transformations 1, $T_1$, $T_2$, $T_1^2 = T_2^2$, $T_1^3$, $T_2^3$, $T_1 T_2$, $T_1^3 T_2$, nous formons un groupe de huit points comprenant deux groupes de $I_4$ et deux groupes de $I'_4$. Lorsque le point P décrit la surface, on obtient $\infty^2$ groupes de huit points formant une involution $I_8$ d'ordre huit, composée au moyen de chacune des involutions $I_4$, $I'_4$.

L'involution $I_8$ est composée au moyen de trois involutions du second ordre : les involutions $I_2$, $I'_2$, $I''_2$ engendrées respectivement par les transformations $T_1^2 = T_2^2$, $T_1, T_2$ et $T_1^3 T_2$. Les involutions $I_4$, $I'_4$ sont également composées au moyen de $I_2$.

**2.** Soit $\Phi_1$ une surface de genres un, image de l'involution $I_4$. Nous avons montré (*loc. cit.*) que l'on peut prendre comme modèle projectif de la surface $\Phi_1$ une surface normale (d'ordre $2\pi - 2$, à sections hyperplanes de genre $\pi$, située dans un espace $S_\pi$ à $\pi$ dimensions) sur laquelle les points de diramation sont :

Quatre points doubles biplanaires $P_{11}$, $P_{12}$, $P_{21}$, $P_{22}$ à chacun desquels est infiniment voisin un point double conique, correspondant aux points unis quadruples $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{21}$, $A_{22}$;

Deux points doubles coniques $P'_1$, $P'_2$ correspondant aux deux groupes $A'_{11} + A'_{12}$, $A'_{21} + A'_{22}$ de points unis doubles.

Aux groupes de $I_8$ correspondent sur $\Phi_1$ des groupes de deux points et par conséquent aux transformations $T_2$, $T_1 T_2$, $T\ T_2$ correspond une transformation birationnelle involutive T de $\Phi_1$ en elle-même. Désignons par $J_2$ l'involution du second ordre engendrée par T sur $\Phi_1$. Les couples de points $P_{11}$ et $P_{12}$, $P_{21}$ et $P_{22}$ forment deux groupes de l'involution $J_2$; les points $P'_1$, $P'_2$ sont unis pour $J_2$.

Une surface $\Phi$, image de l'involution $I_8$, est également image de l'involution $J_2$ Si, par conséquent, nous supposons que l'involution $I_8$ et, par suite, la surface $\Phi$ sont de genres un, l'involution $J_2$ possédera huit points unis.

Chacun des points doubles coniques $P_1'$, $P_2'$ de $\Phi_1$ est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré $-2$. Chacune des courbes rationnelles ainsi obtenues est transformée en elle-même par T et contient donc deux points unis de l'involution $J_2$. Celle-ci possède encore quatre points unis $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$, en des points simples de $\Phi_1$

Au point $Q_1$, par exemple, correspondent sur F quatre points $Q_{11}$, $Q_{12}$, $Q_{13}$, $Q_{14}$ qui ne peuvent être unis pour $T_2$ ni pour $T_2^3$; ces points sont donc des points unis de l'une des involutions $I_1'$, $I_2''$ et constituent deux quaternes communs aux involutions $I_4$, $I_4'$. Les involutions $I_2'$, $I_2''$ sont de genres un et possèdent chacune huit points unis. On conclut de ce qui précède que les involutions $I_4$, $I_4'$ ont quatre quaternes communs; les points de deux de ces quaternes sont unis pour $I_2'$, les points des deux autres sont unis pour $I_2''$.

**3**. Dans le système double de celui des sections hyperplanes de $\Phi_1$, il existe un système linéaire partiel, dépourvu de points-base, composé au moyen de l'involution $J_2$. En rapportant projectivement les courbes de ce système aux hyperplans d'un espace linéaire ayant le même nombre de dimensions, on obtient, comme modèle projectif de la surface $\Phi$, image de l'involution $I_8$, une surface normale (d'ordre $2\pi - 2$, à sections hyperplanes de genre $\pi$, appartenant à un espace linéaire $S_\pi$ à $\pi$ dimensions).

Aux points $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$ correspondent, sur la snrface $\Phi$, comme nous l'avons établi dans nos travaux antérieurs (*loc. cit.*), des points doubles coniques. Aux couples de points $P_{11}$ et $P_{12}$, $P_{21}$ et $P_{22}$ correspondent deux points doubles biplanaires à chacun desquels est infiniment voisin un point double conique.

A chacun des points doubles $P_1'$, $P_2'$ de $\Phi_1$ correspond sur la surface $\Phi$ son point double biplanaire auquel est infiniment voisin un point double conique. On pourrait l'établir directement, mais il est plus facile d'intervertir, dans ce qui précède, les rôles des involutions $I_4$, $I_4'$.

La surface $\Phi$, normale, image de l'involution $I_8$, possède quatre points doubles biplanaires de l'espèce indiquée plus haut, et quatre points doubles coniques.

On peut observer que les transformations $T_1 T_2$, $T_1^3 T_2$, $T_1^2 T_2^2$ de la surface F en elle-même forment un groupe abélien et engendrent une involution du quatrième ordre, ayant 24 points unis doubles, avec laquelle l'involution $I_8$ est composée.

**4**. Nous allons maintenant montrer, par un exemple, l'existence des involutions d'ordre huit du type qui vient d'être étudié.

La surface F, du quatrième ordre, dépourvue de points multiples et par conséquent de genres $p_a = P_4 = 1$, d'équation

$$a_1x_1^4 + a_2x_2^4 + a_3x_3^4 + a_4x_4^4 + a_5x_1^2x_2^2 + a_6x_3^2x_4^2 + a_7x_1x_2x_3x_4 = 0,$$

est transformée en elle-même par les deux homographies de période quatre

$$T_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ix_3 & -ix_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & ix_3 & ix_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

$T_1$ engendre sur F une involution d'ordre quatre ayant quatre points unis quadruples

$$x_3 = 0,\ x_4 = 0, \quad a_1x_1^4 + a_2x_2^4 + a_5x_1^2x_2^2 = 0 \tag{1}$$

et quatre points unis doubles

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \quad a_3x_3^4 + a_4x_4^4 + a_6x_3^2x_4^2 = 0. \tag{2}$$

L'involution d'ordre quatre engendrée sur F par $T_2$ possède les quatre points unis quadruples (2) et les quatre points unis doubles (1).

On a

$$T_1T_2 = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad T_1^3T_2 = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & x_3 & -x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$T_1^2 = T_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

L'involution $I_8$ engendrée sur F par $T_1$, $T_2$ rentre bien dans le type étudié plus haut.

Pour obtenir un modèle projectif de la surface $\Phi$, image de l'involution I , posons

$$\frac{X_1}{x_1^4} = \frac{X_2}{x_2^4} = \frac{X_3}{x_3^4} = \frac{X_4}{x_4^4} = \frac{X_5}{x_1^2x_2^2} = \frac{X_6}{x_3^2x_4^2} = \frac{X_7}{x_1x_2x_3x_4}.$$

Les équations de la surface $\Phi$ sont

$$X_1X_2 = X_5^2, \quad X_3X_4 = X_6^2, \quad X_5X_6 = X_7^2,$$

$$\varphi \equiv a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 + a_5X_5 + a_6X_6 + a_7X_7 = 0.$$

La surface $\Phi$ est donc une surface du huitième ordre, appartenant à un espace linéaire $S_5$ à cinq dimensions. Les points doubles biplanaires singuliers de la surface sont donnés par

$$X_1X_2 - X_5^2 = 0, \quad X_3 = X_4 = X_6 = X_7 = 0, \quad \varphi = 0;$$
$$X_3X_4 - X_6^2 = 0, \quad X_1 = X_2 = X_5 = X_7 = 0, \quad \varphi = 0.$$

Les points unis des involutions engendrées par $T_1T_2$ et $T_1^3T_2$ sont respectivement situés sur les droites $x_1 = x_4 = 0$, $x_2 = x_3 = 0$ et $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = x_4 = 0$. Les points doubles coniques correspondants de la surface $\Phi$ sont donnés par

$$X_1 = X_4 = X_5 = X_6 = X_7 = a_2X_2 + a_3X_3 = 0, \quad X_2 = X_3 = X_5 = X_6 = X_7 = a_1X_1 + a_4X_4 = 0,$$
$$X_1 = X_3 = X_5 = X_6 = X_7 = a_2X_2 + a_4X_4 = 0, \quad X_2 = X_4 = X_5 = X_6 = X_7 = a_1X_1 + a_3X_3 = 0.$$

Il est aisé de vérifier que la surface $\Phi$ possède bien les singularités indiquées en ces différents points doubles.

**5.** En résumé, *il peut exister, sur une surface de genres un* ($p_a = P_4 = 1$), *des involutions du huitième ordre et de genres un engendrées par deux transformations birationnelles de période quatre de la surface en elle-même; chacune de ces transformations présente quatre points unis quadruples et quatre points unis doubles; les points unis quadruples d'une des transformations sont les points unis doubles de l'autre et inversement.*

*On peut prendre, comme modèle projectif de la surface, image d'une telle involution, une surface normale de genres un, d'ordre* $2\pi - 2$, *à sections hyperplanes de genre* $\pi$, *appartenant à un espace linéaire* $S_\pi$ *à* $\pi$ *dimensions, possédant quatre points doubles biplanaires à chacun desquels est infiniment voisin un point double conique, et quatre points doubles coniques.*

Liége, le 29 mars 1935

---

Marcel HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, 112, rue de Louvain, Bruxelles.