EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*
N° 3, 1935.

Sur une surface algébrique qui est, de plusieurs manières, enveloppe de systèmes de surfaces,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Dans quelques notes récentes, un de nos élèves, M. R. Souris, a rencontré des surfaces du sixième et du huitième ordre qui sont, de plusieurs manières, enveloppes de systèmes simplement infinis, d'indice deux, de quadriques (1); ces surfaces ont été obtenues comme surfaces focales de congruences de coniques. Elles sont des cas particuliers d'une surface que nous nous proposons de considérer dans cette note.

1. Considérons deux réseaux $|\Phi|$, $|\Psi|$ de surfaces d'ordres m, n, représentés respectivement par les équations

$$\lambda_1\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 = 0,$$
$$\mu_1\psi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + \mu_2\psi_2 + \mu_3\psi_3 = 0.$$

Établissons entre les surfaces de ces réseaux la correspondance quadratique

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = \mu_2\mu_3 : \mu_3\mu_1 : \mu_1\mu_2.$$

Les surfaces homologues se coupent suivant des courbes formant une congruence du second ordre, dont la surface focale a pour équation

$$(\varphi_1\psi_1)^2 + (\varphi_2\psi_2)^2 + (\varphi_3\psi_3)^2 - 2\varphi_2\psi_2\varphi_3\psi_3 - 2\varphi_3\psi_3\varphi_1\psi_1 - 2\varphi_1\psi_1\varphi_2\psi_2 = 0. \quad (1)$$

Cette surface F, d'ordre $2(m+n)$, est l'enveloppe de plusieurs systèmes d'indice deux, de surfaces d'ordre $m+n$. Désignons en effet par α, β, γ une permutation quelconque des nombres 1, 2, 3. L'équation (1) peut s'écrire

$$(\varphi_\alpha\psi_\alpha - \varphi_\beta\psi_\beta - \varphi_\gamma\psi_\gamma)^2 - 4\varphi_\beta\psi_\beta\varphi_\gamma\psi_\gamma = 0$$

et la surface F est donc l'enveloppe des deux systèmes

$$\lambda^2\varphi_\beta\psi_\beta + \lambda(\varphi_\alpha\psi_\alpha - \varphi_\beta\psi_\beta - \varphi_\gamma\psi_\gamma) + \varphi_\gamma\psi_\gamma = 0, \quad (2)$$
$$\lambda^2\varphi_\beta\psi_\gamma + \lambda(\varphi_\alpha\psi_\alpha - \varphi_\beta\psi_\beta - \varphi_\gamma\psi_\gamma) + \varphi_\gamma\psi_\beta = 0. \quad (3)$$

(1) R. SOURIS, Sur une surface algébrique du sixième ordre (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1931, pp 1365-1377; 1932, pp. 71-82, 165-169); Sur une surface du huitième ordre (*Idem*, 1934, pp. 151-155).

Si $m = n$, la surface est en outre l'enveloppe du système

$$\lambda^2 \varphi_\beta \varphi_\gamma + \lambda (\varphi_\alpha \psi_\alpha - \varphi_\beta \psi_\beta - \varphi_\gamma \psi_\gamma) + \psi_\beta \psi_\gamma = 0. \qquad (4)$$

Les surfaces des systèmes (2), (3) appartiennent à des réseaux dont les points-base sont en général des points doubles coniques de la surface F. Nous supposerons distincts les points-base des réseaux $|\Phi|$, $|\Psi|$; dans ces conditions, la surface F possède les points doubles coniques suivants :

1° les m^3 points-base du réseau $|\Phi|$ et les n^3 points-base du réseau $|\Psi|$;

2° les 3 $m^2 n$ points communs aux surfaces

$$\varphi_\alpha = 0, \quad \varphi_\beta = 0, \quad \psi_\gamma = 0; \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3);$$

3° les 3 mn^2 points communs aux surfaces

$$\varphi_\alpha = 0, \quad \psi_\beta = 0, \quad \psi_\gamma = 0; \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3);$$

4° les 3 $mn(m + n)$ points communs aux surfaces

$$\varphi_\alpha = 0, \quad \psi_\alpha = 0, \quad \varphi_\beta \psi_\beta - \varphi_\gamma \psi_\gamma = 0. \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3).$$

La surface F possède donc $(m + n)^3 + 3\,mn(m + n)$ points doubles coniques.

Lorsque $m = n$, les points-base du réseau auquel appartiennent les surfaces du système (4) sont compris dans les précédents.

2. Un point double conique d'une surface algébrique équivaut, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré — 2. Nous désignerons par Γ la somme des courbes provenant des points doubles de F, base du réseau $|\Phi|$; par Γ' celle des courbes provenant des points-base de $|\Psi|$; par $\Gamma_{\alpha\beta}$, la somme des courbes provenant des points doubles rencontrés au 2°; par $\Gamma'_{\alpha\beta}$ la somme analogue relative au 3°; enfin par Γ_α la somme des points doubles rencontrés au 4°.

Les surfaces $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ touchent la surface F suivant des courbes que nous désignerons respectivement par C_{11}, C_{12}, C_{13} et les surfaces $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$, $\psi_3 = 0$ touchent F suivant les courbes qui seront désignées par C_{21}, C_{22}, C_{23}.

La courbe C_{11} passe par les points doubles figurant dans les sommes Γ, Γ_{12}, Γ_{13}, Γ'_{23}, Γ_1. Si l'on désigne par C les sections planes de F, on a donc

$$2C_{11} + \Gamma + \Gamma_{12} + \Gamma_{13} + \Gamma'_{23} + \Gamma_1 \equiv mC$$

et des relations fonctionnelles analogues pour C_{12}, C_{13}.

On a de même

$$2C_{21} + \Gamma'' + \Gamma'_{12} + \Gamma''_{13} + \Gamma_{23} + \Gamma_1 \equiv nC$$

et des relations analogues pour C_{22}, C_{23}.

3. Les surfaces du système (2) touchent la surface F suivant des courbes C_1 formant un faisceau et l'on a

$$2C_1 + \Gamma + \Gamma' + \Gamma_{23} + \Gamma_{31} + \Gamma_{12} + \Gamma''_{23} + \Gamma'_{31} + \Gamma'_{12} \equiv (m+n)\,C.$$

Par conséquent, on a

$$2C_1 \equiv 2\,(C_{11} + C_{21} + \Gamma_1),$$

et plus généralement

$$2C_1 \equiv 2\,(C_{11} + C_{21} + \Gamma_1) \equiv 2\,(C_{12} + C_{22} + \Gamma_2) \equiv 2\,(C_{13} + C_{23} + \Gamma_3).$$

En considérant les trois permutations $\alpha\beta\gamma$, on obtient trois systèmes de surfaces (2) enveloppant F, mais ces trois systèmes coïncident. Le système (2) contient, en effet, la courbe $C_{11} + C_{21} + \Gamma_1$, donnée par $\varphi_1\psi_1 = 0$, la courbe $C_{12} + C_{22} + \Gamma_2$, donnée par $\varphi_2\psi_2 = 0$, et la courbe $C_{13} + C_{23} + \Gamma_3$, donnée par $\varphi_3\psi_3 = 0$ (pour les valeurs 0, 1, ∞ du paramètre λ). On en déduit de plus que l'on a

$$C_1 \equiv C_{11} + C_{21} + \Gamma_1 \equiv C_{12} + C_{22} + \Gamma_2 \equiv C_{13} + C_{23} + \Gamma_3.$$

4. Envisageons maintenant les systèmes déduits de (3) en donnant à α, β, γ les valeurs possibles. Ce sont les systèmes

$$\lambda^2\varphi_2\psi_3 + \lambda(\varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2 - \varphi_3\psi_3) + \varphi_3\psi_2 = 0, \tag{5}$$

$$\lambda^2\varphi_3\psi_1 + \lambda(\varphi_2\psi_2 - \varphi_3\psi_3 - \varphi_1\psi_1) + \varphi_1\psi_3 = 0, \tag{6}$$

$$\lambda^2\varphi_1\psi_2 + \lambda(\varphi_3\psi_3 - \varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_2) + \varphi_2\psi_1 = 0. \tag{7}$$

Les surfaces de ces systèmes touchent F suivant des courbes que nous désignerons respectivement par C_2, C_3, C_4. On a

$$2C_2 + \Gamma + \Gamma' + \Gamma_{23} + \Gamma'_{23} + \Gamma_2 + \Gamma_3 \equiv (m+n)\,C,$$

$$2C_3 + \Gamma + \Gamma' + \Gamma_{31} + \Gamma'_{31} + \Gamma_3 + \Gamma_1 \equiv (m+n)\,C,$$

$$2C_4 + \Gamma + \Gamma' + \Gamma_{12} + \Gamma'_{12} + \Gamma_1 + \Gamma_2 \equiv (m+n)\,C.$$

On a, par exemple,

$$2C_2 \equiv 2\,(C_{12} + C_{23} + \Gamma_{12} + \Gamma'_{13}) \equiv 2\,(C_{13} + C_{22} + \Gamma_{13} + \Gamma'_{12}).$$

Parmi les courbes C_2 se trouve la courbe découpée par la surface $\varphi_2\psi_3 = 0$ sur la surface F; on peut donc diviser par 2 les membres de la relation fonctionnelle précédente et écrire

$$C_2 \equiv C_{12} + C_{23} + \Gamma_{12} + \Gamma'_{13} \equiv C_{13} + C_{22} + \Gamma_{13} + \Gamma'_{12}.$$

Les courbes C_3, C_4 vérifient les relations fonctionnelles analogues.

Les systèmes $|C_2|$, $|C_3|$, $|C_4|$ sont distincts et distincts de $|C_1|$

5. Dans le cas $m = n$, on a en outre trois faisceaux distincts et distincts des systèmes précédents, fournis par les trois systèmes de surfaces (4). Ce sont les faisceaux

$$|C_5| = |C_{12} + C_{13} + \Gamma + \Gamma_{23}| = |C_{22} + C_{23} + \Gamma' + \Gamma'_{23}|,$$
$$|C_6| = |C_{13} + C_{11} + \Gamma + \Gamma_{31}| = |C_{23} + C_{21} + \Gamma' + \Gamma'_{31}|,$$
$$|C_7| = |C_{11} + C_{12} + \Gamma + \Gamma_{12}| = |C_{21} + C_{22} + \Gamma' + \Gamma'_{12}|.$$

On a, par exemple,

$$2C_5 + \Gamma_{12} + \Gamma_{13} + \Gamma'_{12} + \Gamma'_{13} + \Gamma_2 + \Gamma_3 \equiv (m + n)\, C$$

et des relations analogues pour C_6, C_7.

Liége, le 9 mars 1935.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles.