EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*.
Séance du 21 novembre 1940. — N° 11.

Sur un point de la théorie des correspondances entre deux courbes ou deux surfaces algébriques,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

On sait que si l'on considère une correspondance algébrique entre les points de deux courbes algébriques C_1 de genre p_1 et C_2 de genre p_2, il existe sur chacune de ces courbes deux systèmes réguliers d'intégrales de première espèce réductibles. Sur l'une des courbes, les sommes des intégrales de l'un de ces systèmes étendues aux groupes de points de la courbe homologues des points de l'autre, sont constantes. La dimension de ce système est la même que la dimension du système jouissant de la même propriété sur la seconde courbe.

Si l'on passe aux correspondances algébriques entre deux surfaces irrégulières, on trouve une propriété analogue. Soient F_1, F_2 les deux surfaces, q_1, q_2 leurs irrégularités. Il existe sur chacune des surfaces un système d'intégrales de Picard de première espèce dont les sommes des intégrales, étendues aux points homologues d'un point variable de l'autre surface, restent constantes. Si le système de la surface F_1 contient ρ_1 intégrales indépendantes et celui de la seconde surface ρ_2 intégrales indépendantes, on a

$$q_1 - \rho_1 = q_2 - \rho_2.$$

Cette propriété a été démontrée par M. Albanese [1]. Pour arriver à l'égalité précédente, il démontre que les systèmes linéaires appartenant à un système continu complet, formé de ∞^{q_1} systèmes linéaires, sur la surface F_1, se répartissent en $\infty^{q_1-\rho_1}$ systèmes continus formés chacun de ∞^{ρ_1} systèmes linéaires, les homologues des courbes d'un de ces systèmes continus sur la surface F_2 appartenant à un même système linéaire. De même, sur la surface F_2, les ∞^{q_2} systèmes linéaires d'un système continu complet se répartissent en $\infty^{q_2-\rho_2}$ systèmes continus formés chacun de ∞^{ρ_2} systèmes linéaires.

Dans cette note, en nous basant sur les mêmes concepts que M. Albanese, nous introduisons une démonstration un peu diffé-

---

(1) Corrispondenze algebriche fra i punti di due superficie algebriche (*Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa*, 1934, s. 2, vol. III). Voir aussi TODD, Algebraic correspondences between algebraic varieties (*Annals of Mathematics*, 1935, t. 36).

rente, peut-être plus simple, de l'égalité mentionnée plus haut. En utilisant la surface qui représente les couples de points homologues des surfaces F_1, F_2 dans la correspondance, nous établissons une correspondance entre les systèmes linéaires de deux systèmes continus complets de F_1, F_2. Nous nous sommes d'ailleurs borné à indiquer sommairement la démonstration de certains points qui nous sont nécessaires, mais que l'on trouvera dans le mémoire de M. Albanese.

La démonstration que nous exposons ici est aussi applicable, sans modifications, aux correspondances entre deux courbes algébriques ([2]).

1. Soit F une surface algébrique irréductible d'irrégularité p, contenant une involution I_n, irrégulière, d'ordre n. Désignons par Φ une surface image de l'involution I_n et par π son irrégularité.

Considérons sur F un système continu complet $\{C\}$, de courbes C, formé de ∞^p systèmes linéaires complets $|C|$.

A une courbe C correspond, sur la surface Φ, une courbe Γ qui engendre un système continu rationnel lorsque la courbe C engendre le système linéaire complet auquel elle appartient. Par conséquent, d'après une observation de M. Enriques ([3]), les courbes Γ sont contenues totalement dans un système linéaire $|\Gamma|$.

A chaque système linéaire $|C|$ de $\{C\}$ correspond donc sur Φ un système linéaire $|\Gamma|$, mais un même système linéaire $|\Gamma|$ proviendra, en général, d'une infinité de systèmes linéaires $|C|$ formant un ou plusieurs systèmes continus. Soient Σ un de ces systèmes et ρ sa dimension.

Considérons deux systèmes linéaires $|C_0|$, $|C'_0|$ de Σ et l'opération

$$|C'| = |C + C'_0 - C_0|. \qquad (1)$$

Cette opération fait correspondre au système $|C|$ le système $|C'|$ et, en particulier, au système $|C_0|$, le système $|C'_0|$. Elle est complètement déterminée par les systèmes $|C_0|$, $|C'_0|$. Lors-

([2]) Au sujet des correspondances entre deux surfaces algébriques, on pourra consulter les travaux récents de M. Severi, notamment le mémoire *La base per le varietà algebriche di dimensione qualunque contenute in una data e la teoria generale delle corrispondenze fra i punti di due superficie algebriche* (Memorie R. Accad. d'Italia, 1934).

([3]) Un' osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche (*Rend. Circolo matem. di Palermo*, 1896, t. X).

que $|C|$ décrit Σ, $|C'|$ décrit un système analogue à Σ et qui a en commun avec celui-ci le système $|C'_0|$. D'après la définition de Σ, il coïncide donc avec Σ. La correspondance (1) transforme donc Σ en lui-même. On voit aisément que le système Σ est transformé en lui-même par ∞^ρ correspondances analogues à (1), que ces correspondances forment un groupe transitif et sont deux-à-deux permutables.

Soient maintenant $|C_0|$ un système linéaire de Σ et $|C_1|$ un système linéaire de $\{C\}$ n'appartenant par à Σ. L'opération

$$|C'| = |C + C_1 - C_0|$$

fait correspondre $|C'|$ à $|C|$ et en particulier $|C_1|$ à $|C_0|$. Lorsque $|C|$ décrit Σ, $|C'|$ engendre un système Σ_1 analogue à Σ, nécessairement distinct de celui-ci. On a donc, sur F, $\infty^{p-\rho}$ systèmes Σ formant le système complet $\{C\}$. On voit, d'autre part, qu'un système linéaire de $\{C\}$ ne peut appartenir qu'à un seul système Σ.

Aux $\infty^{p-\rho}$ systèmes Σ correspondent $\infty^{p-\rho}$ systèmes linéaires $|\Gamma|$ de la surface Φ, mais un système linéaire $|\Gamma|$ peut correspondre à un nombre fini η $(\eta < n)$ de systèmes Σ. Sur la surface Φ, on aura donc $\infty^{p-\rho}$ systèmes linéaires $|\Gamma|$ et, par conséquent, $p - \rho \leqslant \pi$.

2. A une seule courbe C correspond une courbe Γ, c'est-à-dire que les points de la courbe Γ correspondent aux groupes de l'involution I_n ayant un point sur la courbe C. Les $n-1$ autres points engendreront sur F une courbe $\overline{C}$, transformée de C par l'involution I_n et à la courbe $C+\overline{C}$ correspondra, sur Φ, la courbe Γ.

Représentons par G la courbe $C+\overline{C}$ et supposons que les systèmes linéaires $|\Gamma|$ appartiennent à un système continu complet $\{\Gamma\}$ formé de ∞^π systèmes linéaires $|\Gamma|$. A ces ∞^π systèmes linéaires, correspondent sur F ∞^π systèmes linéaires $|G|$, appartenant à un système continu complet $\{G\}$ formé de ∞^p systèmes linéaires.

Considérons une courbe G qui ne comprenne pas comme partie une courbe C. Il lui correspond sur Φ une courbe Γ. Faisons varier G d'une manière continue dans $\{G\}$ en la faisant tendre vers une courbe $C+\overline{C}$. La courbe $\overline{\Gamma}$ varie d'une manière continue sur Φ et tend vers une courbe $n\Gamma$.

Reprenons le raisonnement précédent en partant du système continu complet $\{G\}$ (au lieu de $\{C\}$). Nous obtiendrons sur Φ

$\infty^{p-\rho}$ systèmes linéaires $|\Gamma|$. Mais parmi ces systèmes, nous sommes assurés, par la construction du système $\{G\}$, de trouver les ∞^{π} systèmes linéaires $|n\Gamma|$, c'est-à-dire que nous trouverons certainement ∞^{π} systèmes linéaires $|\Gamma|$. On a donc $p-\rho=\pi$.

3. Soient V_p la variété de Picard attachée à la surface F et Ω_{π} la variété de Picard attachée à Φ.

Aux correspondances (1) et (2) sont homologues, sur la variété V_p, des transformations de première espèce de celle-ci. Au système Σ correspond sur V_p une variété abélienne σ, de dimension ρ, engendrant une congruence abélienne linéaire (c'est-à-dire d'ordre un) $\{\sigma\}$, de dimension $p-\rho=\pi$. Les variétés σ ne se rencontrent pas deux-à-deux.

Entre la variété de Picard Ω_{π} et la congruence $\{\sigma\}$ existe une correspondance $(1, \eta)$.

4. Considérons maintenant deux surfaces algébriques irréductibles F_1, d'irrégularité q_1 et F_2, d'irrégularité q_2, liées par une correspondance algébrique (n_1, n_2), irréductible. La surface F, qui représente les couples de points de F_1, F_2 homologues dans la correspondance, est donc irréductible.

Soit, sur F_1, un système continu complet $\{C_1\}$, de courbes C_1, formé de ∞ systèmes linéaires complets $|C_1|$. Aux courbes d'un système linéaire complet $|C_1|$ correspondent sur F_2 des courbes C_2 formant un système continu rationnel; par conséquent, les courbes C_2 sont contenues totalement dans un système linéaire $|C_2|$.

Le même système linéaire $|C_2|$ peut provenir d'une infinité de systèmes linéaires $|C_1|$ se répartissant en un ou plusieurs systèmes continus. Soient Σ_1 un de ces systèmes et ρ_1 sa dimension. Les systèmes linéaires de $\{C_1\}$ se répartissent en $\infty^{q_1-\rho_1}$ systèmes Σ_1; deux systèmes Σ_1 n'ont aucun système linéaire $|C_1|$ en commun et un système $|C_1|$ appartient à un seul système Σ_1.

Sur la variété de Picard V_1 (de dimension q_1) attachée à F_1, aux systèmes Σ_1 correspondent des variétés abéliennes σ_1 de dimension ρ_1, formant une congruence abélienne linéaire $\{\sigma_1\}$, dont les éléments ne se rencontrent pas deux-à-deux et qui est de dimension $q_1-\rho_1$.

En intervertissant les rôles des surfaces F_1, F_2, on trouve que la variété de Picard V_2 (de dimension q_2), attachée à la surface F_2, contient une congruence abélienne linéaire $\{\sigma_2\}$, de dimension $q_2 - \rho_2$, formée de variétés abéliennes σ_2 à ρ_2 dimensions, deux de ces variétés ne se rencontrant pas deux-à-deux.

Il s'agit de démontrer que l'on a $q_1 - \rho_1 = q_2 - \rho_2$.

5. Sur la surface F, dont nous désignerons l'irrégularité par q, considérons un système continu complet $\{C\}$, formé de ∞^q systèmes linéaires $|C|$.

On sait que F contient deux involutions, l'une d'ordre n_2, ayant pour image la surface F_1, l'autre d'ordre n_1, ayant pour image la surface F_2.

Aux courbes d'un système linéaire $|C|$ correspondent sur F_1 des courbes Γ_1, sur F_2 des courbes Γ_2, engendrant des systèmes continus rationnels. Les courbes Γ_1 appartiennent donc totalement à un système linéaire $|\Gamma_1|$ et les courbes Γ_2 à un système linéaire $|\Gamma_2|$.

Les systèmes linéaires $|C|$, auxquels correspondent sur F_1 le système linéaire $|\Gamma_1|$ et sur F_2 le système linéaire $|\Gamma_2|$, forment un ou plusieurs systèmes continus. Soient S un de ces systèmes et ρ sa dimension.

En considérant, entre les systèmes $|C|$ de $\{C\}$, des correspondances du type

$$|C'| = |C + C'_0 - C_0|$$

et en calquant le raisonnement de M. Albanese, on peut voir que les systèmes linéaires $|C|$ du système continu complet $\{C\}$ se distribuent en $\infty^{q-\rho}$ systèmes S, deux de ces systèmes n'ayant aucun système linéaire en commun et un système $|C|$ appartenant à un seul système S.

D'autre part, les systèmes linéaires $|C|$, auxquels correspondent sur F_1 des systèmes de courbes appartenant totalement à un système linéaire $|\Gamma_1|$, forment un ou plusieurs systèmes continus S_1, de dimension $q - q_1$. Et les systèmes linéaires de $\{C\}$ se distribuent en ∞^{q_1} systèmes S_1.

De même, les systèmes linéaires du système $\{C\}$ se distribuent en ∞^{q_2} systèmes continus S_2, de dimension $q - q_2$, les systèmes S_2 donnant naissance, sur F_2, à un même système linéaire $|\Gamma_2|$.

Considérons un système $|\Gamma_1|$ de F_1; il lui correspond sur F un certain nombre η_1 de systèmes S_1. Observons que deux systèmes S_1, S_2 ont en commun une infinité de systèmes linéaires formant les systèmes S correspondant aux systèmes $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ homologues de S_1, S_2. Soit ν le nombre de ces systèmes S. Les systèmes S qui appartiennent au système S_1 homologue de Γ_1 ont pour correspondants, sur F_2, les systèmes linéaires d'un système Σ_2, et inversement.

6. Pour plus de simplicité, utilisons la variété de Picard V, de dimension q, attachée à la surface F. Aux systèmes S correspondent sur V des variétés abéliennes s, de dimension ρ, formant une congruence abélienne linéaire $\{s\}$ de dimension $q-\rho$.

Aux systèmes S_1, S_2 correspondent sur V des variétés abéliennes s_1, s_2, de dimensions $q-q_1$, $q-q_2$, formant des congruences abéliennes linéaires $\{s_1\}$, $\{s_2\}$, de dimensions q_1, q_2.

Les congruences $\{s_1\}$, $\{s_2\}$ sont composées au moyen de la congruence $\{s\}$ et deux variétés s_1, s_2 se coupent suivant ν variétés s.

A un point de la variété de Picard V_1 de F_1 correspondent η_1 variétés s_1 de V. A chaque variété s appartenant à une de ces variétés s_1 correspond un système linéaire $|\Gamma_2|$ de F_2 et l'ensemble de ces systèmes linéaires forme un système Σ_2. Donc, aux variétés s appartenant aux η_1 variétés s_1 considérées correspond sur V_2 une variété σ_2. Or, sur une variété s_1, de dimension $q-q_1$, les variétés s, de dimension ρ, forment une congruence linéaire de dimension $q-q_1-\rho$; ce doit également être la dimension de σ_2. On a donc

$$q - q_1 - \rho = \rho_2.$$

En intervertissant les rôles de V_1, V_2, on trouve $q-q_2-\rho=\rho_1$. On a donc

$$q - \rho = q_1 + \rho_2 = q_2 + \rho_1;$$

d'où

$$q_1 - \rho_1 = q_2 - \rho_2.$$

Liége, le 25 octobre 1940.

Imprimerie M. HAYEZ, rue de Louvain, 112, Bruxelles
(Domicile légal: rue de la Chancellerie, 4)