EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège.*
Séance du 21 novembre 1940. — N° 11.

Sur les surfaces du quatrième ordre possédant quatre points doubles uniplanaires,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Dans nos recherches sur les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique, nous avons, en général, supposé que les points unis étaient isolés et simples pour la surface [1]. On peut d'ailleurs toujours, en choisissant convenablement le modèle projectif de la surface, supposer qu'il en est ainsi. Il n'est cependant pas sans intérêt

[1] Voir notre exposé sur « Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique » (*Actualités scientifiques*, Paris, Hermann, 1935).

d'examiner les cas où les points unis sont multiples pour la surface; c'est ce que nous nous proposons de faire dans cette note, dans un cas particulier qui nous a paru digne de remarque.

Nous avons étudié autrefois l'involution du quatrième ordre, appartenant à une surface F de genres un ($p_a = P_4 = 1$), engendrée par trois transformations birationnelles involutives de la surface en elle-même, deux-à-deux permutables. Une telle involution possède douze couples de points unis (doubles) et on peut prendre, comme image de cette involution, une surface normale Φ de genres un, possédant douze points doubles coniques [2]. Dans le cas où la surface est du quatrième ordre, nous avons montré qu'elle appartient à un faisceau déterminé par l'ensemble des quatre faces d'un tétraèdre T et par une quadrique Q comptée deux fois, cette quadrique Q ne passant pas par les sommets de T [3]. Si la quadrique Q passe par les sommets de T, ces points sont doubles uniplanaires ordinaires pour la surface Φ. Nous établissons dans cette note que cette surface Φ est encore l'image d'une involution du quatrième ordre du type indiqué, mais appartenant cette fois à une surface possédant quatre points doubles coniques autour desquels viennent se grouper les points unis de l'involution. Nous montrons comment se forment les points doubles uniplanaires et nous indiquons, en terminant, comment on peut ramener l'involution étudiée au cas où les points unis sont simples pour la surface support de l'involution.

1. Dans une note antérieure [4], nous avons démontré qu'une surface du quatrième ordre Φ, possédant quatre points doubles uniplanaires ordinaires, appartient à un faisceau déterminé par la surface formée par les quatre faces d'un tétraèdre T et par une quadrique Q, comptée deux fois, passant par les sommets du tétraèdre. Si ce tétraèdre T est pris comme figure de référence, l'équation de la surface Φ peut s'écrire

$$\varphi^2 - x_1x_2x_3x_4 = 0.$$

(2) Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1914, pp. 357-430; 1919, pp. 51-70).

(3) Sur une surface du quatrième ordre à douze points doubles coniques (*Bull. Acad. roy. de Belg.*, 1920, pp. 554-560).

(4) Sur les surfaces du quatrième ordre possédant quatre points doubles uniplanaires ordinaires (*Bull. Acad. roy. de Belg.*, 1924, pp. 418-428).

où l'on a posé

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{14}x_1x_4 + a_{23}x_2x_3 + a_{24}x_2x_4 + a_{34}x_3x_4.$$

Les points doubles uniplanaires sont les sommets du tétraèdre T, les cônes tangents coïncidant avec les plans tangents à la quadriques Q, comptés deux fois. Ainsi, au point O_1, le cône tangent à Φ a pour équation

$$(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)^2 = 0,$$

A chaque point double uniplanaire est infiniment voisine une droite, simple pour la surface Φ, sur laquelle se trouvent trois points doubles coniques qui appartiennent aux faces du tétraèdre T passant par le point considéré.

La surface Φ touche chacune des faces du tétraèdre T suivant une conique; nous désignerons par γ_i la conique se trouvant dans la face d'équation $x_i = 0$.

La surface Φ est l'enveloppe de trois systèmes simplement infinis, d'indice deux, de quadriques, à savoir

$$\lambda^2 x_1x_2 + 2\lambda\varphi + x_3x_4 = 0,$$
$$\mu^2 x_1x_3 + 2\mu\varphi + x_2x_4 = 0,$$
$$\nu^2 x_1x_4 + 2\nu\varphi + x_2x_3 = 0.$$

Chacune des quadriques d'un de ces systèmes touche Φ suivant une biquadratique gauche engendrant un faisceau. Nous désignerons par Γ_{12}, Γ_{13}, Γ_{14} les courbes de chacun de ces trois faisceaux. Il est clair que l'on a

$$|\Gamma_{12}| = |\gamma_1 + \gamma_2| = |\gamma_3 + \gamma_4|, \quad |\Gamma_{13}| = |\gamma_1 + \gamma_3| = |\gamma_2 + \gamma_4|,$$
$$|\Gamma_{14}| = |\gamma_1 + \gamma_4| = |\gamma_2 + \gamma_3|.$$

Les courbes Γ_{12}, Γ_{13}, Γ_{14} passent par les points doubles uniplanaires de la surface Φ et chacune, en un de ces points, par un des points doubles coniques infiniment voisins. Ainsi, par exemple, au point O_1, les courbes Γ_{12} passent par le point double infiniment voisin de O_1 situé dans le plan $x_2 = 0$.

La surface Φ, ne possédant que des points doubles isolés, non tacnodaux, est de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

2. Envisageons, dans un espace linéaire à cinq dimensions S_5, la surface Ψ_{12}, d'ordre huit et de genres un, d'équations

$$x_5^2 = x_1x_2, \quad x_6^2 = x_3x_4, \quad x_5x_6 = \varphi.$$

Cette surface est transformée en elle-même par l'homographie harmonique H,

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 : x'_5 : x'_6 = x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : -x_5 : -x_6 .$$

et cette homographie engendre donc sur la surface une involution I_2 d'ordre deux. Pour obtenir une surface image de cette involution, il suffit de projeter Ψ_{12} de la droite $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, axe ponctuel de H, sur l'espace S_3 d'équations $x_5 = x_6 = 0$, second axe ponctuel de H. Cela revient à éliminer x_5, x_6 entre les équations de Ψ_{12}. On obtient précisément l'équation de Φ. Ainsi, la surface Φ représente l'involution I_2 engendrée par H sur Ψ_{12}.

Aux courbes Γ_{13} correspondent sur Ψ_{12} les courbes Γ^1_{13} découpées par les hyperquadriques

$$\mu^2 x_1 x_3 + 2\mu x_5 x_6 + x_2 x_4 = 0 ; \tag{1}$$

la surface Ψ_{12} appartient à l'enveloppe de ces hyperquadriques.

Aux courbes Γ_{14} correspondent sur Ψ_{12} les courbes Γ^1_{14} découpées par les hyperquadriques

$$\nu_2 x_1 x_4 + 2\nu x_5 x_6 + x_2 x_3 = 0, \tag{2}$$

dont l'enveloppe contient la surface Ψ_{12}.

Considérons le système d'hyperquadriques d'équation

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^2 x_1 x_3 + \lambda_2^2 x_1 x_4 + \lambda_3^2 x_2 x_3 + \lambda_4^2 x_2 x_4 + 2\lambda_1\lambda_2 x_1 x_6 + 2\lambda_1\lambda_3 x_3 x_5 \\ + 2(\lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3) x_5 x_6 + 2\lambda_2\lambda_4 x_4 x_5 + 2\lambda_3\lambda_4 x_2 x_6 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Ce système, d'indice deux, contient le système (1) pour $\lambda_1 = \mu$, $\lambda_4 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et le système (2) pour $\lambda_2 = \nu$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_4 = 0$. Il a pour enveloppe la variété

$$x_5^2 - x_1 x_2 = 0, \quad x_6^2 - x_3 x_4 = 0,$$

qui contient la surface Ψ_{12}. Les hypersurfaces (3) découpent donc, sur Ψ_{12}, un système linéaire triplement infini de courbes du huitième ordre.

3. Considérons maintenant, dans un espace S_3, la surface F du quatrième ordre

$$\varphi(y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_4^2) = y_1 y_2 y_3 y_4,$$

ayant des points doubles aux sommets A_1, A_2, A_3, A_4 du tétraèdre de référence, mais ne passant pas par les arêtes de celui-ci. Cette surface est de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

La surface F est transformée en soi par les trois homographies biaxiales harmoniques

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : x_2 : -x_3 : -x_4, \qquad (H_{12})$$
$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : -x_2 : x_3 : -x_4, \qquad (H_{13})$$
$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : -x_2 : -x_3 : x_4, \qquad (H_{14}).$$

Chacune de ces homographies engendre sur F une involution du second ordre. Pour obtenir une image de l'involution engendrée par H_{12}, considérons les deux systèmes de quadriques appartenant à l'involution de l'espace engendrée par cette homographie, c'est-à-dire

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \lambda_4 y_4^2 + \lambda_5 y_1 y_2 + \lambda_6 y_3 y_4 = 0, \qquad (4)$$
$$\lambda_1 y_1 y_3 + \lambda_2 y_1 y_4 + \lambda_3 y_2 y_3 + \lambda_4 y_2 y_4 = 0. \qquad (5)$$

Rapportons projectivement les quadriques (4) aux hyperplans d'un espace linéaire S_5 en posant

$$\frac{x_1}{y_1^2} = \frac{x_2}{y_2^2} = \dots = \frac{x_6}{y_3 y_4} \qquad (6)$$

L'élimination des y entre ces équations et celles de F donnera l'équation de la surface image cherchée. On trouve précisément la surface Ψ_{12}.

En élevant les deux membres de l'équation (5) au carré et en utilisant les équations (6), on retrouve l'équation (3).

Dans la transformation (2, 1) entre les surfaces F et Ψ_{12}, aux courbes découpées sur F par les quadriques (4), correspondent les sections hyperplanes de Ψ_{12} et aux courbes découpées sur F par les quadriques (5), les courbes le long desquelles les hyperquadriques (3) touchent la surface Ψ_{12}.

4. On peut évidemment partir des systèmes $|\Gamma_{13}|$ ou $|\Gamma_{14}|$ au lieu de partir du système $|\Gamma_{12}|$. On obtiendra ainsi, dans des espaces S_5, des surfaces Ψ_{13}, Ψ_{14}, de genres un, représentant la première l'involution engendrée sur F par l'homographie H_{13}, la seconde l'involution engendrée sur F par l'homographie H_{14}.

Les homographies H_{12}, H_{13}, H_{14} sont deux-à-deux permutables et l'on a

$$H_{12} = H_{13} H_{14}, \quad H_{13} = H_{14} H_{12}, \quad H_{14} = H_{12} H_{13};$$

ces homographies engendrent donc sur F une involution I_4 du quatrième ordre, dont Φ est évidemment l'image.

Considérons sur F les systèmes de courbes découpées par des quadriques et appartenant à l'involution I_4. Ils sont au nombre de quatre et ont pour équations

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \lambda_4 y_4^2 = 0, \tag{7}$$

$$\lambda y_1 y_2 + y_3 y_4 = 0, \quad \mu y_1 y_3 + y_2 y_4 = 0, \quad \nu y_1 y_4 + y_2 y_3 = 0. \tag{8}$$

Rapportons projectivement les quadriques du système (7) aux plans de l'espace en posant

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_2^2 : y_3^2 : y_4^2. \tag{9}$$

On obtiendra précisément, en éliminant les y entre l'équation de F et les formules (9), l'équation de Φ. En élevant au carré les deux membres de chacune des équations (8) et en tenant compte des équations (9) et de l'équation de F, on trouve qu'aux courbes découpées sur F par les quadriques (8) correspondent respectivement les courbes des faisceaux $|\Gamma_{12}|$, $|\Gamma_{13}|$, $|\Gamma_{14}|$.

Les points unis de l'involution I_4 sur la surface F sont évidemment les points de rencontre de cette surface avec les axes des homographies H_{12}, H_{13}, H_{14}, c'est-à-dire les sommets A_1, A_2, A_3, A_4 du tétraèdre de référence. Les points de diramation de la surface Φ, pour la correspondance (1, 4) existant entre Φ et F, sont les points doubles uniplanaires de cette surface. Ce qui est intéressant, c'est de voir la genèse de ces points uniplanaires.

5. Commençons par étudier les points unis de l'involution I'_2 engendrée sur F par l'homographie H_{12}. Ces points unis sont les sommets du tétraèdre de référence et, à cause de la symétrie, il suffira d'étudier l'un d'eux, A_1 par exemple.

Le point A_1 est double conique pour F, le cône tangent ayant pour équation

$$a_{12} y_2^2 + a_{13} y_3^2 + a_{14} y_4^2 = 0.$$

Les génératrices de ce cône sont échangées entre elles par l'homographie H_{12} et il y a deux de ces génératrices unies pour cette homographie; ce sont les génératrices situées dans le plan $y_2 = 0$. Désignons-les par s_1, s_2. Dans le domaine du point A_1 sur la surface F, l'homographie H_{12} détermine donc une involution du second ordre dont les points unis sont les points infiniment voisins de A_1 sur les droites s_1, s_2.

Désignons par C les courbes découpées sur F par les quadriques (4) et par K les sections hyperplanes de Ψ_{12}. Considérons les courbes C passant par A_1 et désignons-les par C'; soient K' les courbes qui leur correspondent. Les hyperplans découpant sur Ψ_{12} les courbes K' passent par le point $x_2=x_3=x_4=x_5=x_6=0$ appartenant à cette surface et que nous désignerons par O'_1.

Les courbes C' ont un point double en A_1, les tangentes à ces courbes étant s_1 et s_2. Considérons une courbe C' déterminée et la courbe homologue K'. Sur la courbe C', le point A_1 est l'origine de deux branches. Considérons un point P_1 sur une des branches et soit P_2 le point que H_{12} lui fait correspondre. Lorsque le point P_1 tend vers le point infiniment voisin de A_1 sur la branche considérée, le point P_2 tend vers le même point. Donc le point P, qui représente le couple P_1, P_2 sur la courbe K', tend vers le point O'_1 sur une branche de cette courbe. Il en résulte que le point O'_1 est l'origine de deux branches distinctes de la courbe K'. Le point O'_1 est donc double pour la surface Ψ_{12}.

Appelons C'' les courbes C' assujetties à toucher en A_1 une tangente à F distincte de s_1, s_2, et K'' les courbes correspondantes sur Ψ_{12}. Les courbes C'' ont en A_1 un point quadruple à tangentes variables et, par conséquent, chacune de ces courbes contient deux couples de l'involution I'_2 infiniment voisins de A_1. Les hyperplans découpant sur Ψ_{12} les courbes K'' passent par une droite issue de O'_1. Aux deux couples de I'_2 infiniment voisins de A_1 sur une courbe C'' correspondent, sur la courbe K'' homologue, deux points distincts infiniment voisins de O'_1; par conséquent la surface Ψ_{12} possède un point double conique infiniment voisin de O'_1; celui-ci est par suite biplanaire pour la surface.

D'une manière précise, la singularité de la surface Ψ_{12} au point O'_1 est équivalente, au point de vue des transformations birationnelles, à l'ensemble de trois courbes rationnelles de degré -2, que nous désignerons par s'_1, s'_2, s'_0; les courbes s'_1, s'_2 ne se rencontrent pas, mais rencontrent s'_0 chacune en un point. Remarquons, d'autre part, que si l'on transforme birationnellement la surface F en une surface sur laquelle le point double A_1 est remplacé par une courbe rationnelle de degré -2, il correspondra aux points infiniment voisins de A_1 situés sur s_1, s_2, des points de cette courbe; ces points seront unis pour l'involution homologue de I'_2 et précisément, comme on sait, unis parfaits pour cette involution. En d'autres termes, les points infiniment voisins de A_1 sur s_1, s_2, sont unis parfaits pour I'_2. Aux points infiniment voisins de ces points correspondent respectivement sur Ψ_{12} les points de s'_1, s'_2. Aux sur Φ deux points variables du domaine de O_1 et, par conséquent, il existe un point double conique sur la droite s'', appartenant à la droite t_1.

Envisageons maintenant les courbes K'_1 passant par le point O'_{12}. Elles forment un faisceau et il leur correspond les sections de Φ par les plans d'un faisceau dont l'axe est une droite t_2 tangente à Φ en O_1. Sur une des courbes K'_1 envisagées, il y a deux points unis pour I_2, infiniment voisins de O'_1, donc les courbes correspondantes sur Φ ont un point double dans le domaine de O_1, sur les droites s''_0 et t_2.

De même, au point O'_{13} correspond un point double conique situé sur la droite s''; c'est le troisième point double du domaine de O_1, complétant la configuration formée par ce point double uniplanaire.

7. De ce qui précède on peut déduire la formation du point double uniplanaire O_1 de Φ en partant du point double conique A_1 de la surface F.

Le point double A_1 de F est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe de degré -2, que nous désignerons par a_1. Sur a_1, il y a ∞^1 groupes de l'involution I_4 et ces groupes ont pour homologues sur Φ les points de la droite simple s''_0, infiniment voisine du point double uniplanaire O_1.

Sur la courbe a_1 se trouvent deux points A_{11}, A'_{11} unis pour l'involution I'_2, formant un groupe de I_4; deux points A_{12}, A'_{12}, unis pour I''_2, formant un groupe de I_4; deux points A_{13}, A'_{13}, unis pour I'''_2, formant un groupe de I_4. Aux couples formés de points respectivement infiniment voisins de A_{11}, A'_{11} correspondent les points de la courbe rationnelle de degré -2, s''_1, équivalente, au point de vue des transformations birationnelles, à l'un des points doubles coniques infiniment voisin de O_1. Les points des courbes rationnelles s''_2, s''_3, de degré -2, équivalentes aux autres points doubles coniques infiniment voisins de O_1, correspondent respectivement aux couples de points infiniment voisins de A_{12}, A'_{12} et aux couples de points infiniment voisins de A_{13}, A'_{13}.

8. Il est facile de rattacher l'étude qui vient d'être faite aux théories que nous avons développées antérieurement sur les involutions appartenant à une surface algébrique.

Rapportons projectivement les quadriques passant par les points A_1, A_2, A_3, A_4 aux hyperplans d'un espace linéaire S_5 en posant

$$\frac{Y_{12}}{y_1y_2} = \frac{Y_{13}}{y_1y_3} = \cdots = \frac{Y_{34}}{y_3y_4}.$$

A la surface F correspond la surface F′ d'équations

$$Y_{12}Y_{34} = Y_{13}Y_{24} = Y_{14}Y_{23} = a_{12}Y_{12}^2 + a_{13}Y_{13}^2 + \cdots + a_{34}Y_{34}^2.$$

Aux homographies H_{12}, H_{13}, H_{14} correspondent les homographies

$$(+,-,-,-,-,+),\quad (-,+,-,-,+,-),\quad (-,-,+,+,-,-).$$

Chacune de ces homographies engendre sur F′ une involution possédant huit points unis, simples pour la surface, à savoir, pour la première, les points

$$Y_{12} = Y_{34} = 0,\quad Y_{13}Y_{24} = Y_{14}Y_{23} = a_{13}Y_{13}^2 + \cdots + a_{24}Y_{24}^2 = 0;$$

pour la deuxième, les points

$$Y_{13} = Y_{24} = 0,\quad Y_{12}Y_{34} = Y_{14}Y_{23} = a_{12}Y_{12}^2 + \cdots + a_{34}Y_{34}^2 = 0;$$

et, enfin, pour la troisième, les points

$$Y_{14} = Y_{23} = 0,\quad Y_{12}Y_{34} = Y_{13}Y_{24} = a_{12}Y_{12}^2 + \cdots + a_{34}Y_{34}^2 = 0.$$

A la courbe a_1 correspond, sur la surface F′, la conique d'équations

$$Y_{23} = Y_{24} = Y_{34} = 0,\quad a_{12}Y_{12}^2 + a_{13}Y_{13}^2 + a_{14}Y_{14}^2 = 0,$$

conique qui contient six des vingt-quatre points unis trouvés plus haut.

Pour obtenir une image de l'involution I_4 engendrée sur F′ par les trois homographies en question, posons

$$\frac{X_{12}}{Y_{12}^2} = \frac{X_{13}}{Y_{13}^2} = \cdots = \frac{X_{34}}{Y_{34}^2}.$$

En éliminant les Y entre les équations de F_4 et les formules précédentes, on obtient les équations d'une surface Φ′, image de l'involution,

$$X_{12}X_{34} = X_{13}X_{24} = X_{14}X_{23} = (a_{12}X_{12} + a_{13}X_{13} + \cdots + a_{34}X_{34})^2.$$

Cette surface est la transformée birationnelle de la surface Φ, obtenue en posant

$$\frac{x_1x_2}{X_{12}} = \frac{x_1x_3}{X_{13}} = \cdots = \frac{x_3x_4}{X_{34}}.$$

A la droite s''_0, correspond sur Φ' la droite

$$X_{23} = X_{24} = X_{34} = 0, \quad a_{12}X_{12} + a_{13}X_{13} + a_{14}X_{14} = 0,$$

le long de laquelle la surface Φ' touche le plan représenté par les trois premières équations. Cette droite contient trois points doubles coniques de Φ', à savoir les points

$$X_{12} = a_{13}X_{13} + a_{14}X_{14} = 0, \quad X_{13} = a_{12}X_{12} + a_{14}X_{14} = 0,$$
$$X_{14} = a_{12}X_{12} + a_{13}X_{13} = 0.$$

On trouve de même neuf autre points doubles coniques de Φ', distribués par trois sur trois droites. Cette surface possède donc bien douze points doubles coniques, conformément aux résultats que nous avons obtenus dans nos travaux cités au début.

Liége, le 9 avril 1940.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)