Bulletin de la Classe des sciences

Sur les points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions (première note)

Lucien Godeaux

Résumé

Étude des points unis d'une involution cyclique d'ordre premier, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une variété algébrique à trois dimensions.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions

(première note)

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Étude des points unis d'une involution cyclique d'ordre premier, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une variété algébrique à trois dimensions.

Nous avons esquissé l'étude des involutions cycliques d'ordre premier appartenant à une variété algébrique à trois dimensions dans un ouvrage récent (1). Nous nous proposons de poursuivre cette étude en considérant la structure des points unis isolés d'une telle involution dans le cas où elle ne possède qu'un nombre fini de points unis. L'étude de cette question dans le cas des involutions appartenant à une surface algébrique est assez complexe (2), les points unis se répartissant en quatre catégories. La complexité augmente lorsque l'on considère les involutions appartenant à une variété algébrique à trois dimensions, les points unis se répartissant en neuf classes.

---

(1) *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Édit. Cremonese, 1963).

(2) *Nouvelles recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1960, pp. 1192-1204, 1326-1337, 1338-1354; 1971, pp. 191-201, 378-387). *Recherches sur la structure des points de diramation d'une surface algébrique multiple* (*Idem.*, 1972, pp. 6-22, 138-170, 171-179, 1299-1306; 1973, pp. 125-133, 293-302).

Une première répartition des points unis isolés dans ce dernier cas s'obtient de la manière suivante: Soit V une variété algébrique à trois dimensions et T une transformation birationnelle dont la période est un nombre premier p de la variété V en soi. Cette transformation engendre sur V une involution cyclique I. Dans le voisinage d'un point uni isolé O de l'involution, T agit comme l'identité, ou comme une homologie, ou comme une homographie non homologique. De là, une première répartition des points unis en trois espèces. Dans les deux dernières espèces, il faut encore considérer les relations entre les nombres entiers satisfaisant, module p, à certaines congruences, comme cela sera indiqué plus loin.

Dans notre ouvrage cité plus haut, nous avons montré que l'on peut prendre comme modèle projectif de la variété V une variété normale d'un espace S_r à r dimensions sur laquelle l'involution est déterminée par une homographie H de période p, possédant p axes ponctuels dont un seul rencontre V en un nombre fini de points. C'est de ce modèle projectif de V que nous partirons.

1. Soit V une variété algébrique à trois dimensions, normale, dans un espace à r dimensions. Supposons que cette variété soit transformée en soi par une homographie H, de période p, p étant un nombre premier, possédant p axes ponctuels $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{p-1}$ dont le premier seul rencontre la variété V en un nombre fini de points. Sur la variété V, H engendre une involution I possédant un nombre fini de points unis: les points de rencontre de ξ_0 avec V. Soit O un de ces points, que nous supposerons isolé, c'est-à-dire que l'espace tangent à V en O ne rencontre pas V en dehors de O. Dans ces conditions, l'espace à trois dimensions σ tangent à V en O est transformé en lui-même par H et dans la gerbe de sommet O, l'homographie H donne l'identité, ou une homologie, ou une homographie non homologique. Dans le premier cas, l'espace σ rencontre suivant un plan un des axes de H distinct de ξ_0. Dans le second, l'espace σ rencontre en un point un de ces axes et suivant une droite un autre de ces axes. Dans le troisième cas, l'espace σ rencontre en un point trois des axes de H distincts de ξ_0.

Suivant le cas qui se présente, le point O sera dit uni de première, de seconde ou de troisième espèce.

2. Désignons par x_0, x_1, x_2, x_3 les coordonnées des points de l'espace σ, le point O étant donné par $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Dans le

cas où le point uni O est de seconde espèce, cas dans lequel nous nous placerons ici, l'homographie induite par H dans l'espace σ a pour équations

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^\alpha x_3,$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité et où α est un entier supérieur à l'unité.

Le nombre p étant premier, il existe un entier β supérieur à l'unité tel que $\alpha\beta - 1$ soit multiple de p. En posant $\eta = \varepsilon^\alpha$, les équations de l'homographie induite par H dans l'espace σ peuvent s'écrire

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_0 : \eta^\beta x_1 : \eta^\beta x_2 : \eta x_3.$$

Au point O sont donc attachés deux entiers α, β supérieurs à l'unité.

Soient λ, μ deux entiers positifs satisfaisant aux congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \qquad \mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p) \tag{1}$$

la somme $\lambda + \mu$ étant la plus petite possible.

Quatre cas peuvent se présenter:

1° $\lambda + \alpha\mu = p, \qquad \mu + \beta\lambda = p;$

2° $\lambda + \alpha\mu = hp, \qquad \mu + \beta\lambda = p, \qquad (h > 1)$

3° $\lambda + \alpha\mu = p, \qquad \mu + \beta\lambda = h'p, \qquad (h' > 1)$

4° $\lambda + \alpha\mu = hp, \qquad \mu + \beta\lambda = h'p. \qquad (h, h' > 1)$

Les points unis de seconde espèce se répartissent donc en quatre catégories. Nous allons dans cette note étudier ces points.

3. Nous désignerons par F les sections hyperplanes de la variété V et par F_0 celles qui sont découpées par les hyperplans passant par les axes de l'homographie H sauf par ξ_0. Le système $| F_0 |$ appartient à l'involution I. Soit r_0 sa dimension.

Rapportons projectivement les surfaces F_0 aux hyperplans d'un espace Σ à r_0 dimensions. Il correspond à V dans cet espace une variété Ω à trois dimensions, image de l'involution I.

Dans l'espace tangent à V en un point uni O isolé, il y a une droite d et un plan Δ unis pour l'homologie induite par H dans la gerbe de sommet O. Nous supposerons que la droite d rencontre en un point l'espace ξ_1 et que le plan Δ rencontre suivant une droite l'espace ξ_α. Nous désignerons par F_1 les surfaces F découpées sur les hyperplans unis pour H ne passant pas par ξ_1 et par F_α celles qui sont découpées par les hyperplans unis pour H ne passant pas par ξ_α.

Au point uni O correspond sur la variété Ω un point de diramation O'. Nous désignerons par Ω' la variété projection de Ω à partir de O' sur un hyperplan Σ' de l'espace Σ.

4. Considérons une surface F_α. En général elle a un point simple en O et son plan tangent en ce point passe par la droite d et rencontre le plan Δ suivant une droite d'. Les courbes $C_0 = (F_\alpha, F_0)$ qui passent par O acquièrent en ce point la multiplicité $\lambda + \mu$, la droite d' absorbant λ tangentes en O et la droite d, μ tangentes.

Nous supposerons que le point O appartient à la première catégorie. Dans ces conditions, sur une surface F_α déterminée, le point O est l'origine de deux branches linéaires. L'une, tangente en O à la droite d contient, en utilisant les notations de notre ouvrage cité plus haut, les $\beta - 1$ points $(\alpha,1)$, $(\alpha,2)$, $\cdots$, $(\alpha,\beta - 1)$ infiniment voisins successifs de O, multiples d'ordre μ pour les courbes C_0. Ces points sont unis de seconde espèce pour l'involution I' formée par l'ensemble des groupes de I appartenant à la surface F_α considérée, sauf le dernier $(\alpha,\beta - 1)$ qui est uni de première espèce. Cela signifie que les points infiniment voisins du point $(\alpha,\beta - 1)$ sur la surface F_α sont unis pour l'involution I' donc pour l'involution I. A ces points correspondent sur la variété Ω' les points d'une courbe rationnelle γ d'ordre μ. Cette courbe appartient à la surface qui correspond sur Ω' à la surface F_α considérée.

Lorsque la surface F_α varie, la courbe γ engendre une surface ϕ.

Appelons F_{00} les surfaces F_0 passant par O. A ces surfaces F_{00} correspondent les sections hyperplanes de la variété Ω'. Une surface F_{00} coupe une surface F_α suivant une courbe C_0, donc la courbe γ correspondante suivant μ points. Il en résulte que la surface ϕ est d'ordre μ.

La seconde branche linéaire d'origine O sur la surface F_α est tangente en O à la droite d' et contient les points $(\beta,1)$, $(\beta,2)$, $\cdots$, $(\beta,\gamma - 1)$ infiniment voisins successifs de O, multiples d'ordre λ pour les courbes C_0 passant par O. Ces points sont unis de seconde espèce pour l'involution I', sauf le dernier qui est uni de première espèce. Les points infiniment voisins de $(\beta,\alpha - 1)$ sur la surface F_α sont unis pour l'involution I' donc pour I et il correspond à ces points sur Ω' les points d'une courbe rationnelle γ' d'ordre λ située sur la surface qui correspond à la surface F_α sur Ω'. Lorsque la surface F_α varie, la courbe γ' engendre une surface ϕ'.

5. Considérons une surface F_1. Elle passe en général simplement par le point O et y touche le plan Δ. Les surfaces F_{00} découpent sur F_1 des courbes C_1 qui ont la multiplicité p en O et des tangentes variables, car pour l'involution I″ formée par les groupes de I appartenant à la surface F_1, le point O est uni de première espèce. A chacune des tangentes à la courbe C_0 en O correspond une courbe γ' et il en résulte qu'une surface F_{00} rencontre p courbes γ'. On en conclut que la surface est d'ordre p.

Les cônes projetant les surfaces ϕ et ϕ' du point O′ sont tangents en ce point à la variété Ω.

Ces résultats sont conformes à ceux que nous avons obtenu dans l'hypothèse où la variété V est un espace à trois dimensions [1].

6. Sur la surface de Ω' homologue d'une surface F_α, les courbes γ, γ' se rencontrent en un point R, qui ne peut être fixe. Lorsque la surface F_α varie, le point R décrit une droite r commune aux surfaces ϕ et ϕ'. On en conclut que:

Si O est un point uni isolé de seconde espèce et de première catégorie d'une involution cyclique d'ordre premier p appartenant à une variété algébrique à trois dimensions, il lui correspond sur une variété Ω image de l'involution, un point O′ multiple d'ordre $\mu + p$ pour cette variété. Le cône tangent en O′ à la variété Ω se scinde en deux cônes d'ordres respectifs μ et p, ayant un plan en commun.

7. Supposons maintenant que le point O appartienne à la seconde catégorie, c'est-à-dire que l'on ait

$$\lambda + \alpha\mu = hp, \qquad \mu + \beta\lambda = p. \qquad (h > 1).$$

Posons

$$p = a\beta + b, \qquad p = a'\alpha + b'.$$

On a $\lambda = a$, $\mu = b$ et de plus

$$a' + b' > a + b.$$

[1] *Sur les homographies cycliques de l'espace* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1972, pp. 1047-1053).

Dans la seconde de nos notes citées plus haut [1], nous avons établi que sur une surface F_α, le point O est l'origine de deux branches linéaires et d'une branche superlinéaire. L'une des branches linéaires est tangente en O à la droite d et contient les points $(\alpha,1)$, $(\alpha,2)$, $\cdots$, $(\alpha,\beta-1)$ unis de seconde espèce pour l'involution I', sauf le dernier qui est uni de première espèce. La branche superlinéaire contient les points $(\alpha,1)$, $\cdots$, (α,x), $(\alpha,x+1)$, une certain nombre de points infiniment voisins successifs de $(\alpha,x+1)$ suivi d'un point P. Ces points sont unis de seconde espèce pour l'involution I' sauf les points $(\alpha,\beta-1)$ et P, qui sont unis de première espèce.

Les courbes C_0 tracées sur la surface F_α passent b fois par les points $(\alpha,1)$, $\cdots$, (α,x), y fois par les points $(\alpha,x+1)$, a' fois par les points $(\alpha,x+2)$, $\cdots$, $(\alpha,\beta-1)$, un certain nombre de fois par les points infiniment voisins de $(\alpha,x+1)$ et m fois par le point P. On a

$$b-y=\mathrm{H}m, \qquad y-a'=\mathrm{H}'m,$$

H et H' étant deux entiers premiers entre eux.

Aux domaines des points $(\alpha,\beta-1)$ et P correspondent sur la variété Ω' et plus précisément sur la surface qui correspond sur cette variété à la surface F_α envisagée, deux courbes rationnelles γ et δ respectivement d'ordres a' et m. Lorsque la surface F_α varie, ces courbes engendrent respectivement des surfaces ϕ et Ψ. Les surfaces F_{00} rencontrent ces courbes en a' et m points, donc la surface ϕ est d'ordre a' et la surface Ψ d'ordre m. Les cônes projetant ces surfaces du point O' sont tangentes en ce point à la variété Ω. La seconde branche linéaire d'origine O sur une surface F_α touche en O la droite d' et contient les points $(\beta,1)$, $(\beta,2)$, $\cdots$, $(\beta,\alpha-1)$. Les courbes C_0 passent $\lambda+\mu$ fois par O et λ fois par les points $(\beta,1)$, $\cdots$, $(\beta,\alpha-1)$. Au domaine de ce dernier point correspond sur la surface de Ω' homologue de F_α une courbe rationnelle γ' d'ordre $\lambda=a$. Lorsque la surface F_α varie, cette courbe engendre une surface ϕ' d'ordre p.

8. Sur la section de la variété Ω' homologue d'une surface F_α, les courbes γ et δ se rencontrent en un point R', les courbes δ et γ' en un point R, mais les courbes γ et γ' ne se rencontrent pas. Lorsque la surface F_α varie, le point R' décrit une droite r' commune aux surfaces

[1] *Recherches sur la structure..., loc. cit.* pp. 158-170.

ϕ et Ψ, le point R une droite r commune aux surfaces Ψ et ϕ'. On en déduit:

Si O est un point uni isolé de seconde espèce et de seconde catégorie pour une involution cyclique d'ordre premier p appartenant à une variété algébrique à trois dimensions, le point O' qui lui correspond sur la variété Ω image de l'involution est multiple d'ordre $a' + m + p$ pour cette variété. Le cône tangent se décompose en trois cônes respectivement d'ordres a', m, p. Le premier et le second ont en commun un plan et il en est de même du second et du troisième. Le premier et le troisième ne se rencontrent qu'au point O'.

9. Plaçons-nous maintenant dans le cas où le point O appartient à la troisième catégorie, c'est-à-dire que l'on ait

$$\lambda + \alpha\mu = p, \qquad \mu + \beta\lambda = h'p,$$

Nous poserons $p = a + \alpha b$ et on aura $\lambda = a$, $\mu = b$, la somme $a + b$ étant inférieure à toutes les sommes $\lambda + \mu$ des solutions des congruences auxquelles ces nombres doivent satisfaire.

Considérons une surface F_α. Sur cette surface, le point O est l'origine d'une branche linéaire passant par les points $(\alpha,1)$, $(\alpha,2)$, $\cdots$, $(\alpha,\beta - 1)$ tous unis de seconde espèce pour l'involution I' sauf le dernier qui est uni de première espèce. Le point O est multiple d'ordre $a + b$ pour les courbes C_0 de F_α et ces courbes passent b fois par les points $(\alpha,1)$, $\cdots$, $(\alpha,\beta - 1)$. Au domaine de ce dernier point correspond sur la variété Ω' une courbe rationnelle γ d'ordre b. Comme dans le cas des points unis de la première catégorie, on voit que la courbe γ engendre, lorsque la surface F_α varie, une surface ϕ d'ordre b. Le cône projetant de O' cette surface ϕ est tangent en ce point à la variété Ω.

10. Sur la surface F_α, le point O est l'origine de deux branches tangentes en de point à la droite d'. L'une, linéaire, contient les points $(\beta,1)$, $(\beta,2)$, $\cdots$, $(\beta,\alpha - 1)$. L'autre, superlinéaire, contient les points $(\beta,1)$, $\cdots$, (β,x'), $(\beta,x' + 1)$, un certain nombre de points infiniment voisins successifs de $(\beta,x' + 1)$ suivis d'un point P'. Les courbes C_0 passent $a + b$ fois par le point O, a fois par les points $(\beta,1)$, $\cdots$, (β,x'), y' fois par le point $(\beta,x' + 1)$, b' fois par les points $(\beta,x' + 2)$, $\cdots$, $(\beta,\alpha - 1)$, un certain nombre de fois par les points infiniment voisins de $(\beta,x' + 1)$ et m' fois par P'. On a $b' = p - \beta a'$.

Aux domaines des points $(\beta, \alpha - 1)$ et P′ correspondent respectivement des courbes rationnelles γ' et δ' d'ordres b' et m'. On a

$$a - y' = \mathrm{K}m', \qquad y' - b' = \mathrm{K}'m', \qquad (h' > 1)$$

K et K′ étant deux entiers premiers entre eux.

Comme les courbes C_1 déterminées par les surfaces F_{00} sur une surface F_1 ont en O la multiplicité p et des tangentes variables, on voit que la courbe γ', quand la surface F_α varie, engendre une surface ϕ' d'ordre pb' et la courbe δ' une surface Ψ' d'ordre pm'. Les projections de ces surfaces à partir du point O sont tangentes en ce point à la variété Ω.

11. Sur la surface qui correspond à une surface F_α sur la variété Ω', les courbes γ et δ' se rencontrent en un point R et les courbes δ' et γ' se rencontrent en un point R′. Les courbes γ et γ' ne se rencontrent pas.

Lorsque la surface F_α varie, le point R′ décrit une droite r' commune aux surfaces Ψ' et Ψ, le point R décrit une droite r commune aux surfaces ϕ et Ψ'. On en conclut:

Si O *est un point uni isolé de seconde espèce et de troisième catégorie d'une involution cyclique d'ordre premier p appartenant à une variété algébrique à trois dimensions, le point* O′ *qui lui correspond sur la variété* Ω *image de l'involution est multiple d'ordre* $b + pm' + pb'$ *pour cette variété. Le cône tangent se décompose en trois cônes respectivement d'ordres* b, pm', pb', *le premier et le second ont en commun un plan de même que le second et le troisième. Le premier et le troisième cônes ne se rencontrent pas en dehors du point* O′.

12. Passons à l'examen des points unis appartenant à la quatrième catégorie. Si O est un de ces points et λ, μ une solution en nombres entiers positifs des congruences (1) telle que $\lambda + \mu$ soit minimum, nous avons par hypothèse

$$\lambda + \alpha\mu = hp, \qquad \mu + \beta\lambda = h'p, \qquad (h, h' > 1).$$

Nous poserons

$$p = b\beta + a, \qquad p = a'\alpha + b'$$

et par hypothèse, on a

$$a + b > \lambda + \mu, \qquad a' + b' > \lambda + \mu.$$

Considérons une surface F_α. Sur cette surface, le point O est l'origine de quatre branches, deux linéaires et deux superlinéaires.

Le point O est l'origine de deux branches tangentes en ce point à la droite d. L'une, linéaire, contient les points $(\alpha,1)$, $(\alpha,2)$, $\cdots$, $(\alpha,\beta-1)$. L'autre, superlinéaire, passe par les points $(\alpha,1)$, $\cdots$, (α,x), $(\alpha,x+1)$, par un certain nombre de points infiniment voisins successifs du point $(\alpha,x+1)$, suivis d'un point P.

Ces points sont unis de seconde espèce sauf les points $(\alpha,\beta-1)$ et P qui sont unis de première espèce pour l'involution I'. Les courbes C_0 passent μ fois par les points $(\alpha,1)$, $\cdots$, (α,x), y fois par le point $(\alpha,x+1)$, a' fois par les points $(\alpha,x+2)$, $\cdots$, $(\alpha,\beta-1)$, un certain nombre de fois par les points infiniment voisins du point $(\alpha,x+1)$ et m fois par le point P. Aux domaines des points $(\alpha,\beta-1)$ et P correspondent sur Ω' des courbes respectivement γ d'ordre a' et δ d'ordre m. On a

$$\mu - y = \mathrm{H}m, \qquad y - a' = \mathrm{H}'m,$$

H et H' étant deux entiers premiers entre eux.

Lorsque la surface F varie, les courbes γ et δ engendrent des surfaces ϕ et Ψ. Les surfaces F_{00} rencontrent les courbes γ et les courbes δ respectivement de sorte que les surfaces ϕ et Ψ sont respectivement d'ordres a' et m.

Les cônes projetant ces surfaces du point O' touchent en ce point la variété Ω.

13. Le point O est sur une surface F_α l'origine de deux branches, l'une, linéaire, passe par les points $(\beta,1)$, $(\beta,2)$, $\cdots$, $(\beta,\alpha-1)$, l'autre, superlinéaire, passe par les points $(\beta,1)$, $\cdots$, (β,x'), $(\beta,x'+1)$, par une suite de points infiniment voisins successifs de $(\beta,x'+1)$ et par un dernier point P'. Seuls, les points $(\beta,\alpha-1)$ et P' sont unis de première espèce pour l'involution I'. Les courbes C_0 passent $\lambda+\mu$ fois par O, λ fois par les points $(\beta,1)$, $\cdots$, (β,x'), y' fois par le point $(\beta,x'+1)$, b fois par les points $(\beta,x'+2)$, $\cdots$, $(\beta,\alpha-1)$, un certain nombre de fois par les points infiniment voisins successifs de $(\beta,x'+1)$, m' fois par P'. Les points $(\beta,\alpha-1)$ et P' sont seuls unis de première espèce pour l'Involution I' et il correspond à leurs domaines, sur Ω', deux courbes rationnelles respectivement γ' d'ordre b et δ' d'ordre m'. On a encore

$$\lambda - y' = \mathrm{K}m', \qquad y' - b = \mathrm{K}'m',$$

K et K' étant des entiers premiers entre eux.

Lorsque la surface ξ_α varie, ces courbes engendrent des surfaces ϕ pour les courbes γ' et Ψ' pour les courbes δ'. Comme les courbes C_1 sur une surface F_1 ont en O un point multiple d'ordre p à tangentes variables, la surface ϕ' est d'ordre pb et la surface Ψ' d'ordre pm'.

Les cônes projetant ces surfaces du point O sont tangents en ce point à la variété Ω.

14. Sur la surface qui correspond sur la variété Ω' à une surface F_α, il existe quatre courbes γ, δ, δ', γ'. Chacune de ces courbes a un point commun avec la précédente et la suivante, mais ne rencontre pas les autres. Comme plus haut, on voit que ces points, lorsque la surface F_α varie, décrivent des droites. On voit ainsi que les surfaces ϕ et Ψ ont en commun une droite r_1, les surfaces Ψ et Ψ' une droite r et les surfaces Ψ' et ϕ' une droite r_1'. On en conclut:

Si O *est un point uni isolé de seconde espèce et de quatrième catégorie d'une involution cyclique d'ordre premier p appartenant à une variété algébrique à trois dimensions, le point de diramation* O′ *qui lui correspond sur la variété Ω image de l'involution est multiple d'ordre $a' + m + pm' + pb$ pour cette variété. Le cône tangent se décompose en quatre cônes respectivement d'ordres a', m, pm, pb, les deux premiers cônes, le second et le troisième, le troisième et le quatrième ont en commun des plans, les autres cônes n'ont en commun que le point* O′.

Liège, le 29 novembre 1943.