Sur les points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions (seconde noté)

Lucien Godeaux

Résumé
Étude de la structure d'un point uni isolé dans le cas où il est l'origine de six branches linéaires et de la multiplicité du point de diramation correspondant sur une variété image de l'involution.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions

(seconde note)

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Étude de la structure d'un point uni isolé dans le cas où il est l'origine de six branches linéaires et de la multiplicité du point de diramation correspondant sur une variété image de l'involution.

Nous nous proposons d'étudier dans cette note le cas d'un point uni isolé O d'une involution cyclique d'ordre premier p appartenant à une variété algébrique V à trois dimensions dans le cas où la transformation de V en soi génératrice de l'involution induit, dans le voisinage du point O une homographie non homologique. Le point O est ce que nous avons appelé un point uni de troisième espèce. Dans ce cas, le point O est sur V l'origine de six branches linéaires. Nous nous bornons ici au cas où le point O n'est l'origine d'aucune branche superlinéaire.

Nous prenons comme modèle projectif de la variété V une variété normale d'un espace S_r sur laquelle l'involution est déterminée par une homographie H de période p possédant p axes ponctuels dont un seul rencontre V aux points unis de l'involution. Nous avons montré comment on construit ce modèle projectif ailleurs (1). Nous

(1) *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, édit. Cremonese, 1963).

supposerons connue la théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique telle que nous l'avons développée dans l'ouvrage qui vient d'être cité et dans les compléments que nous y avons apportés récemment (1).

La première note publiée sous ce titre traitait des points unis de seconde espèce, où dans le voisinage d'un de ces points, l'homographie H détermine une homologie (2). Rappelons que nous avons considéré les points unis de première espèce, où dans le voisinage d'un tel point H détermine l'identité, dans notre ouvrage cité plus haut.

1. Soit dans un espace S_α à r dimensions, une variété algébrique normale V à trois dimensions, transformée en elle-même par une homographie H, dont la période est un nombre premier $p > 2$, possédant p axes ponctuels $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{p-1}$ de dimensions respectives $r_0, r_1, \cdots, r_{p-1}$. Nous supposerons que seul l'espace ξ_0 rencontre la variété V en un nombre fini de points. Rappelons que l'on peut choisir V de façons que les nombres r et r_0 soient aussi grands qu'il est nécessaire.

Sur la variété V, l'homographie H engendre une involution cyclique I n'ayant qu'un nombre fini de points unis: les points de rencontre de V avec l'espace ξ_0. Nous considérerons un de ces points O que nous supposerons uni isolé, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune tangente à V en O qui appartienne à l'espace ξ_0.

Le point O étant par hypothèse de troisième espèce, l'espacc tangent σ à V en O rencontre en un point trois des axes de H distincts de ξ_0. Si nous attachons à chacun des axes de l'homographie H une racine primitive de l'unité de la manière habituelle, si ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité, nous attacherons à l'axe ξ_i de H le nombre ε^i. Cela étant, nous supposerons que l'espace σ tangent à V en O rencontre en un point A_1 l'espace ξ_1, en un point A_α l'espace ξ_α et en un point A_β l'espace ξ_β. Dans la gerbe de droites de centre O située dans l'espace σ, nous avons donc une homographie ayant pour axes les droites OA_1, OA_α et OA_β.

(1) *Recherches sur la structure des points de diramation d'une surface algébrique multiple* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1972, pp. 6-22, 158-170, 171-179, 1299-1306; 1973, pp. 125-133, 293-302).

(2) La première note est parue dans ce Bullctin, 1973, pp. 000-000.

Observons que si l'on écrit les p premières puissances de ε^α, on obtient toutes les racines primitives d'ordre p de l'unité et en particulier ε^β. On a donc $\beta = u\alpha$, u étant un entier positif inférieur à p. On voit de même que ε^α est une puissance entière de ε^β et qu'on a $\alpha = v\beta$, v étant un entier inférieur à p. Le nombre $\alpha\beta = uv\alpha\beta$ étant un multiple de p augmenté d'un certain entier positif inférieur à p, on en déduit que $uv - 1$ est un multiple de p. Ce nombre étant premier, chacune des valeurs u,v détermine l'autre.

2. Nous désignerons par F les surfaces sections hyperplanes de V, par F_i celles qui sont découpées par les hyperplans passant par les axes de H sauf par ξ_i. Le système linéaire $|F_i|$ appartient à l'involution I et si $i \geqslant 1$, a pour points-base les points unis de l'involution.

Rapportons projectivement les surfaces F_0 aux hyperplans d'un espace Σ à r_0 dimensions. Il correspond à la variété V une variété normale Ω image de l'involution I.

Nous désignerons par ϕ_i les surfaces qui correspondent aux surfaces F_i. Le système $|\phi_i|$ est complet et le système $|\phi_0|$ est le système des sections hyperplanes de Ω.

Soit O′ le point de diramation de Ω qui correspond au point uni O.

Considérons une surface F tangente en O au plan $OA_\alpha A_\beta$. L'homographie H et ses différentes puissances lui font correspondre des surfaces F possédant la même propriété et la somme de ces surfaces est une surface du système $|pF_0|$ ayant un point multiple d'ordre p en O et comme plan tangent en ce point le plan $OA_\alpha A_\beta$ compté p fois.

La même construction conduit à une surface du système $|pF_0|$ ayant la multiplicité p en O et comme plan tangent en ce point le plan OA_1A_α compté p fois et à une surface du système $|pF_0|$ ayant également la multiplicité p en O mais le plan tangent en ce point le plan OA_1A_β compté p fois.

Ces trois surfaces étant équivalentes, déterminent un système linéaire de surfaces pF_0 ayant en O la multiplicité p et un cône tangent variable.

On peut supposer sans restriction que les surfaces F_0 passant par le point O acquièrent la multiplicité p en ce point, le cône tangent étant variable. Comme on peut prendre r arbitrairement grand, il suffirait en effet de remplacer V par la variété obtenue en rapportant projectivement les surfaces pF aux hyperplans d'un espace ayant la dimension du système complet $|pF|$.

3. Considérons une surface F_1. En général, elle passe simplement par O et y a comme plan tangente le plan $OA_\alpha A_\beta$. Désignons par I′ l'involution engendrée par H sur la surface F_1, c'est-à-dire l'ensemble des groupes de l'involution I appartenant à cette surface. Le point O est un point uni de seconde espèce pour l'involution I′.

Si nous posons $\varepsilon^\alpha = \eta e^u$, nous avons $\varepsilon^\beta = \eta e^u$ et si nous posons $\zeta = e^\beta$, nous avons $\varepsilon^\alpha = \zeta e^v$. De plus, comme on l'a vu, $uv - 1$ est un multiple de p et la connaissance d'un de ces nombres entraîne celle de l'autre, p étant premier. Au point uni O pour l'involution I′ sont associés les nombres u, v.

Soient λ_1, μ_1 une solution en nombres entiers positifs des congruences équivalentes

$$\lambda + v\mu \equiv 0, \qquad \mu + u\lambda \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

telle que la somme $\lambda_1 + \mu_1$ soit la plus petite possible.

Le point O est l'origine de deux branches linéaires. L'une, tangente en O à la droite OA_α, contient les points $(u,1)$, $(u,2)$, $\cdots$, $(u,v-1)$, infiniment voisins successifs de O. L'autre, tangente à la droite OA_β en O, contient les points $(v,1)$, $(v,2)$, $\cdots$, $(v,u-1)$, infiniment voisins successifs de O. Tous ces points sont unis de second espèce pour l'involution I′, sauf les points $(u,v-1)$, $(v,u-1)$ qui sont unis de première espèce.

Désignons par F_{00} les surfaces F_0 passant par O et par C_{00} les courbes qu'elles découpent sur la surface F_1 considérée. Les courbes C_{00} passent $\lambda_1 + \mu_1$ fois par O et par les points $(u,1)$, $\cdots$, $(u,v-1)$ et par les points $(v,1)$, $\cdots$, $(v,u-1)$. La somme des multiplicités des courbes C_{00} en O et aux points $(u,1)$, $\cdots$, $(u,v-1)$ de même que la somme des multiplicités de ces courbes en O, $(v,1)$, $\cdots$, $(v,u-1)$ sont égales à p. On voit que les points de la première suite, de même que les points de la seconde suite appartiennent aux courbes (F_1,F_{00}).

4. On sait que l'on peut partager les points unis de seconde espèce d'une involution appartenant à une surface algébrique en trois catégories. On a en effet

$$\lambda_1 + v\mu_1 = hp, \qquad \mu_1 + u\lambda_1 = h'p,$$

les nombres h et h' étant des entiers positifs. Si l'un au moins de ces nombres est supérieur à l'unité, le point O appartient à la seconde ou à la troisième catégorie. Nous supposerons ici que le point O appartient à la première catégorie, c'est-à-dire que l'on a

$$\lambda_1 + v\mu_1 = p, \qquad \mu_1 + u\lambda_1 = p.$$

Dans ces conditions, les courbes C_{00} passent μ_1 fois par les points $(u,1), \cdots, (u,v-1)$ et λ_1 fois par les points $(v,1), \cdots, (v,u-1)$.

Désignons par Ω' la variété projection de Ω à partir de O′ sur un hyperplan Σ' de l'espace Σ et par $\phi_0', \phi_1', \cdots, \Phi_{p-1}'$ les projections sur Ω' des surfaces $\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_{p-1}$. Les surfaces ϕ_0' sont les sections hyperplanes de la variété Ω'.

Les courbes C_{00} ont en $(u,v-1)$ un point multiple d'ordre μ_1 à tangentes variables et aux points de F_1 infiniment voisins de $(u,v-1)$ correspondent sur Ω' les points d'une courbe rationnelle γ_1, rencontrée en μ_1 points par les sections hyperplanes de Ω' et par conséquent d'ordre μ_1.

Lorsque la surface F_1 varie, la courbe γ_1 engendre une surface rationnelle Ψ_1, Quelle que soit F_1, une surface F_0 rencontre la courbe γ_1 se trouvant sur cette surface en μ_1 points, donc le lieu de ces points est une courbe d'ordre μ_1 et la surface Ψ_1 est d'ordre μ_1. Une courbe (F_1,F_{00}) rencontre la surface Ψ_1 en μ_1 points.

De même, les courbes C_{00} passent $\lambda_1 + \mu_1$ fois par le point O et λ_1 fois par les points $(v,1), \cdots, (v,u-1)$ et aux points infiniment voisins de ce dernier point correspondent sur Ω' les points d'une courbe rationnelle γ_1' d'ordre λ_1, qui, lorsque la surface F_1 varie, engendre une surface rationnelle Ψ_1' d'ordre λ_1.

On voit que les courbes (F_1, F_{00}) passent $\lambda + \mu$ fois par O, μ_1 fois par les points $(u,1), \cdots, (u,v-1)$, λ_1 fois par les points $(v,1), \cdots, (v,u-1)$ et rencontrent la surface Ψ_1 en μ_1 points variables et la surface Ψ_1' en λ_1 points variables.

Les cônes projetant les surfaces Ψ_1, Ψ_1' du point O′ sont tangents en ce point à la variété Ω.

Sur une surface ϕ_1' homologue d'une surface F_1, les courbes γ_1, γ_1' ont un point commun R. On sait qu'aux sections hyperplanes de ϕ_1' passant par R correspondent des courbes C_{00} assujetties à toucher en O une droite distincte de OA_α, OA_β. Ces courbes C_{00} sont donc découpées sur les surfaces F_1 par les surfaces F_{00} assujetties à toucher en O un plan ne passant pas par OA_α, OA_β. Le lieu du point R quand F_1 varie est donc une droite r commune aux surfaces Ψ_1 et Ψ_1'. Les cônes projetant ces surfaces du point O ont en commun le plan Or.

5. Considérons une surface F_β. Elle a généralement un point simple en O, le plan tangent étant le plan OA_1A_α. Désignons par I″ l'involution formée sur cette surface par les groupes de l'involution I qui lui appartiennent.

Le nombre p étant premier, il existe un entier α' compris entre 1 et p tel que l'expression $\alpha\alpha' - 1$ soit multiple de p. Pour l'involution I″, le point O est uni de seconde espèce et les nombre α, α' lui sont attachés.

Soient, λ_2, μ_2 des entiers positifs satisfaisant aux congruences équivalentes

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \qquad \mu + \alpha'\lambda \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

tels que la somme $\lambda_2 + \mu_2$ soit la plus petite possible. Nous supposerons que pour l'involution I″ le point O soit de seconde espèce et appartienne à la première catégorie, c'est-à-dire que l'on a

$$\lambda_2 + \alpha\mu_2 = p, \qquad \mu_2 + \alpha'\lambda_2 = p.$$

Dans ces conditions, les courbes C_{10} découpées sur F_β par les surfaces F_{00} ont en O la multiplicité $\lambda_2 + \mu_2$ et passent μ_2 fois par une suite de points $(\alpha',1)$, $(\alpha',2)$, $\cdots$, $(\alpha',\alpha - 1)$ infiniment voisins successifs de O, le premier se trouvant sur la droite OA_α et λ_2 fois par une suite de points $(\alpha,1)$, $(\alpha,2)$, $\cdots$, $(\alpha,\alpha' - 1)$ infiniment voisins successifs de O, le premier se trouvant sur la droite OA_1. Tous ces points sont unis de seconde espèce pour l'involution I″, sauf les points $(\alpha',\alpha - 1)$ et $(\alpha,\alpha' - 1)$, qui sont unis de première espèce.

Aux points de F_β infiniment voisins de $(\alpha',\alpha - 1)$ correspondent sur la surface Φ'_β homologue de F_β les points d'une courbe rationnelle γ_2 d'ordre μ_2. Aux points de F_β infiniment voisins de $(\alpha,\alpha' - 1)$ correspondent sur Φ'_β les points d'une courbe rationnelle γ'_2 d'ordre λ_2.

Lorsque la surface F_β varie, la courbe γ_2 engendre une surface rationnelle Ψ_2 d'ordre μ_2 et la courbe γ'_2 une surface rationnelle Ψ'_2 d'ordre λ_2.

Les courbes (F_β,F_{00}) ont en O la multiplicité $\lambda_2 + \mu_2$, passent μ_2 fois par les points $(\alpha',1)$, $(\alpha',2)$, $\cdots$, $(\alpha',\alpha - 1)$ et λ_2 fois par les points $(\alpha,1)$, $\cdots$, $(\alpha,\alpha' - 1)$, elles rencontrent la surface Ψ_2 en μ_2 points variables et la surface Ψ'_2 en λ_2 points variables.

Sur une surface Φ'_β, les courbes γ_2 et γ'_2 se rencontrent en un point R_2. Le lieu de ce point lorsque F_β varie est une droite r_2 commune aux surfaces Ψ_2 et Ψ'_2.

6. Considérons une surface F_α qui passe en général simplement par O en y touchant le plan $OA_\beta A_1$. Soit I‴ l'involution déterminée par H sur cette surface.

Il existe en entier β' compris entre 1 et p tel que $\beta\beta' - 1$ soit multiple de p. Pour l'involution I‴, le point O est uni de seconde espèce et les nombres β, β' lui sont attachés.

Le point O est sur la surface F_α l'origine de deux branches linéaires. L'une est tangente en O à la droite OA_β et contient les points $(\beta,1)$, $(\beta,2)$, $\cdots$, $(\beta,\beta' - 1)$, l'autre est tangente en O à la droite OA_1 et contient les points $(\beta',1)$, $(\beta',2)$, $\cdots$, $(\beta',\beta - 1)$. Ces deux suites de points sont infiniment voisines successives du point O et leurs points sont unis de seconde espèce pour l'involution I‴, sauf les points $(\beta,\beta' - 1)$ et $(\beta',\beta - 1)$, qui sont unis de première espèce.

Soient λ_3, μ_3 deux entiers positifs satisfaisant aux congruences

$$\lambda + \beta\mu \equiv 0, \qquad \mu + \beta'\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

et tels que la somme $\lambda_3 + \mu_3$ soit la plus petite possible. Nous supposerons que le point O appartient à la première catégorie, c'est-à-dire que l'on a

$$\lambda_3 + \beta\mu_3 = p, \qquad \mu_3 + \beta'\lambda_3 = p.$$

Les courbes C_{20} découpées sur F_α par les surfaces F_{00} passent $\lambda_3 + \mu_3$ fois par O, λ_3 fois par les points $(\beta,1)$, $\cdots$, $(\beta,\beta' - 1)$ et μ_3 fois par les points $(\beta',1)$, $\cdots$, $(\beta',\beta - 1)$.

Aux points infiniment voisins de $(\beta,\beta' - 1)$ sur F_α correspondent sur la surface Φ'_α une courbe rationnelle γ_3 d'ordre λ_3 et de même, au domaine du point $(\beta',\beta - 1)$ correspond une courbe rationnelle γ'_3 d'ordre μ_3. Ces courbes se rencontrent en un point R_3.

Lorsque la surface F_α varie, la courbe γ_3 engendre une surface rationnelle Ψ_3 d'ordre λ_3, la courbe γ'_3 une surface rationnelle Ψ'_3 d'ordre μ_3 et enfin le point R_3 une droite r_3 commune aux surfaces Ψ_3 et Ψ'_3.

Les courbes (F_α, F_{00}) passent $\lambda_3 + \mu_3$ fois par O, λ_3 fois par les points $(\beta,1)$, $\cdots$, $(\beta,\beta' - 1)$, μ_3 fois par les points $(\beta,1)$, $\cdots$, $(\beta',\beta - 1)$, elles rencontrent la surface Ψ_3 en λ_3 points variables et la surface Ψ'_3 en μ_3 points variables également.

7. Reprenons une surface F_0. Il est clair que les points $(u,2)$, $\cdots$, $(u,v - 1)$ et $(v,2)$, $\cdots$, $(v,u - 1)$ varient avec la surface, par contre,

les points $(u,1)$ et $(v,1)$ restent fixes, l'un infiniment voisin de O sur la droite OA_α, le second sur la droite OA_β.

Pour une surface F_β, les points $(\alpha,1)$ et $(\alpha',1)$ restent fixes quand la surface varie, le premier infiniment voisin de O sur la droite OA_1 et le second sur la droite OA_α. Les points $(u,1)$ et $(\alpha',1)$ doivent donc coïncider. D'une part les surfaces F_{00} passent μ_1 fois par ce point et d'autre part μ_2 fois. On doit donc avoir $\mu_1 = \mu_2$.

Le même raisonnement montre que:

Les points $(\alpha,1)$ et $(\beta',1)$ coïncident et l'on a $\lambda_2 = \mu_3$.
Les points $(u,1)$ et $(\alpha',1)$ coïncident et on a $\mu_1 = \mu_2$.
Les points $(v,1)$ et $(\beta,1)$ coïncident et on a $\lambda_1 = \lambda_3$.

On en conclut que les surfaces F_{00} passent $\lambda_1\mu_1\lambda_2 = \mu_2\mu_3\lambda_3$ fois par O, le cône tangent à la variété v' en ce point passant $\lambda_2 = \mu_3$ fois par la droite OA_1, $\mu_1 = \mu_3$ fois par OA_α et $\lambda_1 = \lambda_3$ fois par la droite OA_β.

8. Supposons que l'on ait

$$uv - 1 = k_1 p, \qquad \alpha\alpha' - 1 = k_2 p, \qquad \beta\beta' - 1 = k_3 p,$$

les nombres k_1, k_2, k_3 étant des entiers positifs.

Des équations

$$\lambda_1 + v\mu_1 = p, \qquad \mu_1 + u\lambda_1 = p.$$

indiquant que le point O est uni de première catégorie pour l'involution I' sur une surface F_1, on déduit

$$\lambda_1 = (v - 1) : k_1, \qquad \mu_1 = (u - 1) : k_1.$$

On a de même

$$\lambda_2 = (\alpha - 1) : k_2, \qquad \mu_2 = (\alpha' - 1) k_2,$$
$$\lambda_3 = (\beta - 1) : k_3, \qquad \mu_3 = (\beta' - 1) k_3,$$

On en déduit les relations

$$k_2(\beta' - 1) = k_3(\alpha - 1),$$
$$k_3(u - 1) = k_1(\beta - 1),$$
$$k_1(\alpha' - 1) = k_2(v - 1).$$

9. *Classification des points unis de troisième espèce.* Nous avons supposé dans ce qui précède que le point O, pour les involutions

déterminées par I sur les surfaces F_1, F_α et F_β appartenait à la première catégorie. Dans le cas général, nous devons avoir

$$\begin{aligned} \lambda_1 + v\mu_1 &= h_1 p, & \mu_1 + u\lambda_1 &= h_2 p, \\ \lambda_2 + \alpha\mu_2 &= h'_1 p, & \mu_2 + \alpha'\lambda_2 &= h'_2 p, \\ \lambda_3 + \beta\mu_3 &= h''_1 p, & \mu_3 + \beta'\lambda_3 &= h''_2 p, \end{aligned}$$

où les h et h', h'' sont des entiers positifs.

C'est d'après les valeurs de ces nombres que l'on peut classer les points unis de troisième espèce des involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions. Dans le cas étudié ici, où les h et h', h'' sont tous égaux à l'unité, il y a six surfaces Ψ et Ψ' associées au point uni O. On peut prévoir que si l'un des nombres h, h', h'' est supérieur à l'unité, ce nombre de surfaces sera augmenté d'une unité. Ce sera l'objet de prochaines notes.

Liège, le 9 décembre 1973.