Une famille de surfaces algébriques

Lucien Godeaux

Résumé
Étude des surfaces intersections d'une hypersurface algébrique et d'un cône dont les sections hyperplanes sont des surfaces de Veronese généralisées.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Une famille de surfaces algébriques

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Étude des surfaces intersections d'une hypersurface algébrique et d'un cône dont les sections hyperplanes sont des surfaces de Veronese généralisées.

L'étude d'une surface liée par G. Humbert (1) aux fonctions abéliennes de genre trois nous a conduit à considérer une surface, modèle projectif de la surface de Humbert, appartenant à un espace à six dimensions, intersection d'une hypersurface cubique et d'un cône dont les sections hyperplanes sont des surfaces de Veronese (2).

Nous appelons surface de Veronese généralisée d'ordre n^2 la surface obtenue en rapportant projectivement les courbes d'ordre n d'un plan aux hyperplans d'un espace linéaire à $n(n+3):2$ dimensions. Cela étant, nous considérons, dans un espace à $r = (n+1)(n+2):2$ dimensions, un cône dont les sections hyperplanes sont des surfaces de Veronese généralisées d'ordre n^2. Une hypersurface algébrique coupe ce cône suivant une surface que nous étudions en vue d'applications ultérieures. Nous avons déjà étudié jadis le cas $n = 2$ (3) et cela nous a permis de construire une involution rationnelle appartenant à une surface de genre trois (4).

---

(1) *Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois* (Journal de Liouville, 1896, pp. 261-293).

(2) *Sur une surface algébrique considérée par M. G. Humbert* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1921, pp. 14-20).

(3) *Une famille de surfaces algébriques de l'espace à six dimensions* (Bulletin de la Société Mathématique de France, 1925, pp. 484-503).

(4) *Sur une involution rationnelle douée de trois points de coïncidence appartenant à une surface de genre trois* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1921, pp. 653-665, 694-702).

A la fin de cette note, nous signalons l'existence d'une surface projectivement canonique de l'espace à dix dimensions, c'est-à-dire d'une surface dont les courbes canoniques sont les sections hyperplanes.

1. L'équation d'une courbe plane d'ordre n contient

$$r = (n + 1)(n + 2) : 2 \text{ termes.}$$

Dans un plan σ, ces courbes sont en nombre ∞^{r-1}. Rapportons projectivement ces courbes aux hyperplans d'un espace S_{r-1} à $r - 1$ dimensions. Aux points du plan σ correspondent les points d'une surface Ψ d'ordre n^2, que nous appelerons surface de Veronese généralisée d'ordre n^2.

Aux droites du plan σ correspondent des courbes rationnelles normales ψ d'ordre n. Les courbes ψ forment un système homaloïdal et une section hyperplane de la surface Ψ est équivalente à n courbes ψ.

Supposons que l'espace S_{r-1} soit un hyperplan d'un espace S_r à r dimensions. Soit 0 un point de S_r n'appartenant pas à S_{r-1}. La projection de Ψ à partir de 0 est un cône (Ψ) à trois dimensions. Il contient ∞^2 cônes (ψ) projections des courbes ψ. Deux cônes (ψ) ont en commun une génératrice.

Considérons une hypersurface algébrique V d'ordre p de S_r, ne passant pas par le point 0. Elle coupe le cône (Ψ) suivant une surface F d'ordre pn^2. Nous désignerons par C les sections des cônes (ψ) par l'hypersurface V. Ces courbes sont d'ordre pn et forment un réseau $|C|$ de degré p.

Les cônes (ψ) et par suite les courbes C appartiennent à des espaces à $n + 1$ dimensions.

2. Entre une courbe rationnelle ψ et la courbe C située sur le cône (ψ) correspondant, nous avons une correspondance (l,p). Les points unis de cette correspondance sont situés sur la polaire du point 0 par rapport à l'hypersurface V; ils sont donc au nombre de $pn(p - 1)$. Si π est le genre de la courbe C, la formule de Zeuthen donne

$$-2p + pn(p - 1) = 2\pi - 2.$$

Il en résulte que les hypersurfaces d'ordre $n(p - 1) - 2$ découpent sur une génératrice du cône (ψ) des groupes de la série canonique de C. On a donc

$$|C'| = |\{n(p - 1) - 2\} C|$$

Le système canonique de la surface F est donc

$$| C' - C | = | \{n(p - 1) - 3\} C |.$$

Ce sont ces résultats que nous allons obtenir par une autre voie qui nous permettra de calculer les genres de la surface F.

3. Nous commencerons par déterminer l'adjoint au système $| C |$.

Considérons dans un plan ξ les courbes γ d'équation

$$\lambda x_0^{n-1} x_1 + \varphi_n(x_1, x_2) = 0,$$

où φ_n est une forme algébrique de degré n de ses arguments, à coefficients variables. Ces courbes contiennent $n + 2$ coefficients et forment un système $| \gamma |$ de dimension $n + 1$ et de degré n. Un faisceau de courbes γ contient en effet une courbe formée de n droites passant par le point 0_0 $(x_1 = x_2 = 0)$ et coupant une courbe irréductible du faisceau en n points variables.

Rapportons projectivement les courbes γ aux hyperplans d'un espace S_{n+1} à $n + 1$ dimensions. Aux droites passant par 0_0 correspondent des droites passant par un point 0. Ces droites s'appuient sur une courbe rationnelle normale d'ordre n, projectivement identique à une courbe ψ. On en conclut que le cône obtenu est projectivement identique à un cône (ψ) et peut donc être supposé identique à ce cône.

Deux courbes γ dont l'une est formée de n droites passant par 0_0 ont en commun $n(n - 1)$ points confondus en 0_0, donc deux courbes γ irréductibles doivent avoir $n(n - 1)$ points d'intersection confondus en 0_0. Cela n'est possible que s'il existe $n - 1$ points $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ infiniment voisins successifs de 0_0 communs à toutes les courbes γ, le premier P_1 se trouvant sur la droite $x_1 = 0$.

4. On peut obtenir ce résultat par une autre voie.

La transformation quadratique T d'équations

$$x_0 : x_1 : x_2 = x_0'^2 : x_1' x_2' : x_0' x_2'$$

fait correspondre au point infiniment voisin de 0_0 que la droite $x_1 = 0$, le point $0_0'(x_1' = x_2' = 0)$.

A la courbe γ, T fait correspondre la courbe

$$\lambda x_0^{2n-2} x_1 + x_2^{n-1} \varphi_n(x_1, x_0) = 0$$

et au point P_1 correspond un point qui possède un point simple fixe sur la droite $x_1 = 0$.

Opérons sur γ la transformation T^k dont les équations sont

$$x_0 : x_1 : x_2 = x_0'^{k+1} : x_1' x_2'^k : x_0'^k x_2'.$$

A la courbe γ correspond la courbe

$$\lambda x_0^{(k+1)(n-1)} x_1 + x_2^{n-1} \varphi_n(x_1 x_2^{k-1}, x_0^k) = 0.$$

Pour $k < n - 1$, la courbe a un point simple infiniment voisin de 0_0, mais pour $k = n - 1$, l'équation de la transformée de γ contient deux termes ayant la puissance la plus élevée en x_0 et au point 0_0 sont infiniment voisins des points variables, simples pour la courbe. On a en effet pour équation de la courbe

$$x_0^{n(n-1)}[\lambda x_1 + x_2 \varphi_n(0,1)] + \ldots = 0.$$

On voit donc qu'au point 0_0 de la courbe γ sont infiniment voisins successifs $n - 1$ points simples, communs à toutes les courbes, le premier étant sur la droite $x_1 = 0$.

5. A une courbe C, intersection du cône (ψ) avec l'hypersurface V d'ordre p, correspond dans le plan ξ une courbe du système $|p\gamma|$. Cette courbe, d'ordre pn, passe $p(n - 1)$ fois par le point 0_0 et p fois par les points $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$.

Les adjointes à la courbe $(p\gamma)$ sont des courbes d'ordre $pn - 3$ passant $p(n - 1) - 1$ fois par 0_0 et $p - 1$ fois par les points $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$. Elles comprennent donc la droite $x_1 = 0$ comme partie. La courbe restante, d'ordre $pn - 4$, passe $p(n - 1) - 2$ fois par 0_0, $p - 2$ fois par P_1, mais doit passer $p - 1$ fois par P_2. Cela n'est possible que si les courbes adjointes contiennent une seconde fois la droite $x_1 = 0$. La même observation peut se faire pour le point P_3 et ainsi de suite. On trouve finalement que les adjointes $(p\gamma)'$ aux courbes de $p\gamma$ doivent contenir $n - 1$ fois la droite $x_1 = 0$ et il reste des courbes que nous désignerons par $(p\gamma_0)'$, d'ordre $n(p-1)-2$, passant $(n - 1)(p - 1)$ fois par 0_0 et $p - 2$ fois par $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$.

La courbe $(p\gamma_0)'$ contient $n - 2$ fois la courbe γ et est complétée par une courbe d'ordre $n - 2$ passant $n - 2$ fois par 0_0, c'est-à-dire par $n - 2$ droites passant par 0_0.

Si nous désignons par s les droites du plan ξ passant par 0_0, nous pouvons écrire

$$(p\gamma)'_0 \equiv (p-2)\gamma + (n-2)s \equiv (p-1)\gamma - 2s.$$

Cette relation transportée sur la courbe C donne

$$C' \equiv (p-1)nC - 2C.$$

On vérifie d'ailleurs aisément que les courbes $(p\gamma)'_0$ coupent la courbe $(p\gamma)$ en $2\pi - 2$ points variables.

La dimension du système $|\gamma|$ étant $n+1$, le nombre des courbes $(p-2)\gamma$ linéairement indépendantes est égal à $\binom{n+p-1}{p-2}$ et les courbes formées de $n-2$ droites s linéairement indépendantes étant égal à $n-1$. La dimension du système $(p\gamma)'_0$ est égale à

$$(n-1)\binom{n+p-1}{p-2}.$$

Ce nombre est supérieur à $\pi - 1$, donc les courbes adjointes aux courbes C découpent sur une de celles-ci la série canonique complète. Par un théorème classique de Castelnuovo, *la surface* F *est donc régulière.*

6. Considérons dans un espace à trois dimensions les surfaces G d'équation

$$\lambda x_0^{n-1}x_1 + \varphi_n(x_1,x_2,x_3) = 0,$$

où φ_n est une forme algébrique de degré n de ses arguments, à coefficients variables. Les surfaces G sont d'ordre n et la dimension du système $|G|$ est égale à $r = (n+1)(n+2):2$.

Rapportons projectivement les surfaces G aux hyperplans d'un espace à r dimensions, S_r. Nous obtenons un cône d'ordre n de sommet 0 projetant de ce point une surface de Veronese généralisée d'ordre n^2 représentant les courbes d'ordre n du plan $x_0 = 0$. Ce cône est projectivement identique au cône (Ψ) et peut être considéré comme identique à ce cône. Aux plans ξ passant par 0_0 correspondent les cônes (ψ). Il en résulte que la section d'une surface G par un plan ξ passant par 0_0 est une courbe γ possédant $n-1$ points simples infiniment voisins successifs de 0_0, le premier étant dans le plan

$x_1 = 0$. Lorsque le plan ξ varie, ces points engendrent des droites infiniment petites $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ infiniment voisines successives de 0_0, la première étant dans le plan $x_1 = 0$. Ce plan rencontre d'ailleurs les surfaces G la première suivant n droites variables (¹).

A la surface F correspond une surface du système $|pG|$, d'ordre pn, passant $p(n-1)$ fois par 0_0 et p fois par les droites $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$.

Considérons les adjointes d'ordre $pn - 4$ aux surfaces du système $|pG|$. Ces surfaces passent $p(n-1) - 2$ fois par 0_0 et $p - 1$ fois par les droites $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$. En raisonnant comme dans le cas des courbes $(p\gamma)'$, on voit que l'on doit défalquer de ces surfaces $n - 1$ fois le plan $x_1 = 0$. Il reste alors des surfaces que nous désignerons par $(pG)'_0$, d'ordre $n(p-1) - 3$, passant $(n-1)(p-1) - 2$ fois par 0_0 et $p - 2$ fois par les droites $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$.

Les surfaces $(pG)'_0$ sont équivalentes à $p - 2$ surfaces G complétées par des surfaces d'ordre $n - 3$ passant $n - 3$ fois par 0_0, c'est-à-dire par des cônes de sommet 0_0 d'ordre $n - 3$. On a donc

$$(pG)'_0 \equiv (p-2)G + (n-3)\xi.$$

Cette relation peut être remplacée dans le cas $n = 2$ par la relation

$$(pG)'_0 \equiv (p-3)G + \xi,$$

car on a $G \equiv 2\xi$.

Les surfaces G sont en nombre ∞^r, donc les surfaces $(p-2)G$ linéairement indépendantes sont au nombre de $\binom{r+p-2}{p-2}$ et les cônes d'ordre $n - 3$ linéairement indépendants sont au nombre de $\binom{n-1}{2}$. Il en résulte que le genre géométrique de la surface F est égal à

$$p_g = \binom{n+p-2}{p-2}\binom{n-1}{2}.$$

Dans le cas $n = 2$, cette formule peut être remplacée par

$$p_g = 3\binom{p+3}{p-3}.$$

(¹) On pourrait le vérifier en utilisant la transformation quadratique

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_2x_3 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_0x_3.$$

Le système canonique étant donné par

$$|\{n(p-1)-3\}\, C\,|,$$

son degré est égal à

$$[n(p-1)-3]^2 p = p^{(1)} - 1.$$

La surface F, *intersection d'un cône de l'espace* S_r *à* $r=(n+1)(n+2):2$ *dimensions, dont les sections hyperplanes sont des surcaes de Veronese généralisées d'ordre* n^2, *par une hypersurface d'ordre p ne passant pas par le sommet du cône, a si* $n \geqslant 3$, *les genres*

$$p_a = p_g = \binom{n+p-2}{p-2}\binom{n-1}{2},$$

$$p^{(1)} = [n(p-1)-3]^2 p + 1.$$

Dans le cas $n=2$, *on a*

$$p_a = p_g = 3\binom{p+3}{p-3}.$$

7. Examinons quelques cas particuliers et tout d'abord la surface de Humbert. Ce géomètre a considéré la surface qui représente les couples de points d'une courbe algébrique de genre trois, chaque point de la surface représentant deux couples de points de la courbe formant un groupe canonique de celle-ci. Nous avons montré, dans la note citée plus haut, que l'on peut prendre pour modèle projectif de la surface, l'intersection dans un espace à six dimensions d'un cône à sections hyperplanes surfaces de Veronese et d'une variété algébrique cubique.

Pour cette surface, nous avons $n=2$ et $p=3$. Cela nous donne $p_a = p_g = 3, p^{(1)} = 4$. Le système canonique est le réseau $|\,C\,|$. La surface de Humbert possède 28 points doubles coniques correspondant aux 28 bitangentes de la courbe de genre trois.

Dans une remarque sur un théorème d'Enriques (1), nous avons considéré la surface qui correspond au cas $n=3, p=2$. Dans ce cas, on a $p_a = p_g = 1, p^{(1)} = 4$.

(1) *Remarque sur un théorème de F. Enriques* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1973, pp. 787-792).

Le système canonique est $|C - C|$ et la surface possède une courbe canonique d'ordre zéro; les courbes pluricanoniques sont également d'ordre zéro. La surface est caractérisée par les valeurs $p_a = p_4 = 1$.

8. Envisageons maintenant le cas $n = p = 3$. Nous avons

$$p_a = p_g = 11, \; p^{(1)} = 28.$$

Le système canonique de la surface F est $|3C|$, c'est-à-dire le système des sections hyperplanes.

Dans un espace à dix dimensions, le cône projetant d'un point une surface de Veronese généralisée d'ordre neuf est coupé par une hypersurface algébrique d'ordre trois suivant une surface projectivement canonique, c'est-à-dire dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques.

Supposons que h soit une homographie non homologique du plan σ, de période trois. Il lui correspond dans S_9 une homographie h' possédant trois points unis, $0_1, 0_2, 0_3$ sur la surface Ψ. Dans notre note « Remarque sur un théorème d'Enriques » citée plus haut, nous avons montré que l'on peut prendre dans l'espace S_{10} une homographie H de période trois possédant comme axes un espace à trois dimensions $00_1 0_2 0_3$ et deux plans σ_1, σ_2 ne rencontrant pas la surface F. Sur cette surface, H détermine une involution I d'ordre trois, présentant neuf points unis: les points de rencontre des droites $00_1, 00_2, 00_3$ avec l'hypersurface V, que nous supposons être une hypersurface transformée en soi par l'homographie H et ne contenant pas les axes de cette homographie.

Entre le genre $p_a = 11$ de F et le genre arithmétique p'_a d'une surface Φ image de l'involution I, nous avons la relation (1)

$$12(p_a + 1) = 3.12(p'_a + 1) - 9.8,$$

car les points unis de I sont de seconde espèce, le plan tangent à F en l'un d'eux s'appuyant sur les plans σ_1, σ_2.

Nous avons démontré que le système canonique de Φ a pour transformé sur F des coyrbes canoniques ne passant pas par les points unis, c'est-à-dire actuellement les courbes canoniques découpées par les hyperplans passant par les axes σ_1, σ_2 de H (2).

(1) Voir notre ouvrage sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Cremonese, 1963).

(2) Voir notre ouvrage sur *Les involutions cycliques*... (loc. cit.).

En rapportant projectivement ces courbes aux hyperplans d'un espace à quatre dimensions, on obtient un modèle projectif de la surface Φ.

Reprenons les notations de notre note « Remarque sur un théorème d'Enriques », les équations de la surface sont

$$X_{11}X_{22}X_{33} = X'^3,$$

$$\varphi_3(X_0,X_{11},X_{22},X_{33},X') = 0,$$

où φ_3 est une forme algébrique cubique.

Dans l'hyperplan $X_0 = 0$, la première équation repıésente une surface cubique ayant trois points doubles biplanaiıes et dans l'espace à quatre dimensions, un cône ayant trois droites doubles à plans tangents distincts. Les neuf points doubles biplanaires de diramation de la surface Φ sont découpés sur ces droites par l'hypersurface $\varphi_3 = 0$. La surface Φ est d'ordre neuf. Rappelons que l'intersection de deux hypersurfaces cubiques dans un espace à quatre dimensions est en général une surface projectivement canonique.

Liège, le 16 septembre 1973.