per

sée

Bulletin de la Classe des sciences

Une variété algébrique à trois dimensions dotée d'une surface canonique d'ordre zéro

Lucien Godeaux

Résumé

Construction d'une variété algébrique à trois dimensions dont la surface canonique est d'ordre zéro. Étude d'une involution cyclique d'ordre trois appartenant à cette variété.

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Une variété algébrique à trois dimensions dotée d'une surface canonique d'ordre zéro. In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 59, 1973. pp. 553-558;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1973.60736

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1973_num_59_1_60736

Fichier pdf généré le 04/06/2020

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Une variété algébrique à trois dimensions dotée d'une surface canonique d'ordre zéro

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Construction d'une variété algébrique à trois dimensions dont la surface canonique est d'ordre zéro. Étude d'une involution cyclique d'ordre trois appartenant à cette variété.

Persée BY: creative commons

Dans des notes déjà anciennes, nous avons étudié dans un espace à six dimensions les surfaces intersections d'une hypersurface algébrique et d'un cône dont les sections hyperplanes sont des surfaces de Veronese (1). Récemment, nous avons considéré les variétés algébriques à trois dimensions, intersections, dans un espace à dix dimensions, d'une hypersurface algébrique et d'un cône dont les sections hyperplanes sont des variétés de Veronese à trois dimensions (2). Dans cette note, nous considérons la variété obtenue lorsque l'hypersurface considérée est du troisième ordre. La variété possède alors une surface canonique d'ordre zéro. Nous étudions ensuite une involution cyclique du troisième ordre appartenant à cette variété.

---

(1) *Sur une surface algébrique considérée par M. G. Humbert* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1921, pp. 14-20), *Sur une involution rationnelle douée de trois points de coïncidence appartenant à une surface algébrique de genre trois* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1921, pp. 653-665, 694-702), *Sur une famille de surfaces algébriques de l'espace à six dimensions* (Bulletin de la Société Mathématique de France, 1924, pp. 484-503).

(2) *Une famille de variétés algébriques* (en cours de publication dans un volume offert au Prof. L. Ilev, de Sofia).

1. Rapportons projectivement les ∞^9 quadriques d'un espace S_3 aux hyperplans d'un espace S_9. Aux points de S_3 correspondent les points d'une variété de Veronese W d'ordre huit. Aux droites de S_3 correspondent sur W des coniques γ et aux plans, des surfaces ψ du quatrième ordre. Deux surfaces ψ ont en commun une conique γ.

Supposons que l'espace S_9 appartienne à un espace S_{10} et projetons W d'un point O de cet espace n'appartenant pas à S_9. Nous obtenons un cône W′ d'ordre huit. Les coniques γ sont projetées suivant des cônes Γ du second ordre et les surfaces ψ suivant des cônes Ψ du quatrième ordre. Deux cônes Ψ ont en commun un cône Γ.

Considérons la variété V intersection du cône W′ avec une hypersurface cubique V_9^3 ne passant pas par le sommet O du cône W′. Nous désignerons par C les courbes découpées par cette hypersurface sur les cônes Γ et par F les surfaces découpées sur les cônes Ψ.

2. Un cône Γ appartient à un S_3 et sa section par la variété cubique V_9^3 est une sextique de genre quatre dont le système canonique est découpé par les plans du S_3 c'est-à-dire par les hyperplans de S_{10}.

Dans nos notes citées plus haut, nous avons démontré que le système canonique d'une surface F est formé par les ∞^2 courbes C appartenant à cette surface. Elles sont découpées sur F par les ∞^2 cônes Γ appartenant au cône Ψ contenant F. Une surface F a donc les genres $p_a = p_g = 3, p^{(1)} = 4$, car cette surface est régulière.

Considérons maintenant la variété V. Deux surfaces F ont en commun une courbe C, c'est-à-dire une courbe canonique de chacune de ces surfaces. On en conclut que l'adjoint $|F'|$ au système $|F|$ est ce système lui-même. Le système canonique de V est donc $|F - F|$, c'est-à-dire est constitué par une surface d'ordre zéro.

La variété V *possède une surface canonique d'ordre zéro.*

Il en résulte que tout système linéaire de surfaces appartenant à la variété V est son propre adjoint.

3. Désignons par x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées des points de S_3 et par O_i le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf x_i.

(3) Nous avons considéré les involutions cycliques appartenant à une surface F dans une note *Quelques involutions appartenant à une surface de Humbert généralisée* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1936, pp. 240-251, 438-446).

Nous prendrons comme coordonnées des points de S_9 les quantités

$$X_{ik} = x_i x_k = x_k x_i.$$

Considérons dans S_3 l'homographie h d'équations

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^2 x_4,$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité. Il lui correspond dans S_9 une homographie h' d'équations

$$\rho X_{ik}' = X_{ik}, \ (i = 1,1,2,3; k = 1,2,4),$$

$$\rho X_{ik}^i = X_{ik}, \ (i = 1,2,3; k = 3,3,4),$$

$$\rho X_{ik}' = X_{ik}, \ (i = 1,2,3; k = 4,4,3).$$

Les équations de la variété W' s'obtiennent en écrivant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{12} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{13} & X_{23} & X_{33} & X_{34} \\ X_{14} & X_{24} & X_{34} & X_{44} \end{vmatrix}$$

est de caractéristique un.

L'homographie h' possède trois axes ponctuels. Si nous désignons par O_{ik} le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf X_{ik}, ces axes sont:

Un espace à trois dimensions $O_{11}O_{12}O_{22}O_{34}$ qui rencontre la variété W suivant la conique γ_0 d'équations

$$X_{12}^2 = X_{11}X_{22}, \ X_{34} = 0.$$

Un plan $O_{13}O_{23}O_{44}$ qui rencontre la variété W suivant le seul point X_{44};

Un plan $O_{14}O_{24}O_{33}$ qui rencontre la variété W suivant le seul point O_{33}.

Dans l'espace S_{10}, nous désignerons par $X_0 = 0$ l'équations de l'hyperplan S_9 de sorte que le sommet du cône W' sera le point O_0 dont toutes les coordonnées X_{ik} sont nulles, X_0 n'étant pas nulle.

Désignons par H l'homographie de S_{10} dont les équations dans S_9 sont celles de h' et qui a en outre l'équation

$$\rho X_0' = X_0.$$

Les axes ponctuels de H sont l'espace à quatre dimensions $O_0O_{11}O_{12}O_{22}O_{34}$ et les plans $O_{13}O_{23}O_{44}$ et $O_{14}O_{24}O_{33}$. Ces axes rencontrent le cône W' suivant le cône Γ_0 projection de γ_0 à partir de O_0 et suivant les points O_{33}, O_{44}.

4. Supposons que la variété V_9^3 soit transformée en elle-même par H. Son équation est de la forme

$$\varphi_3(X_0,X_{11},X_{12},X_{22},X_{34}) + \varphi_3'(X_{13},X_{23},X_{44}) + \varphi_3''(X_{14},X_{24},X_{33}) + \\ + X_0\varphi_{11}(X_{13},X_{23},X_{44};x_{14},x_{24},x_{44}) = 0$$

où φ_3, φ_3', φ_3'' sont des formes cubiques et φ_{11} une forme bilinéaire de leurs arguments. Dans ces conditions, la variété V est transformée en soi par H et cette homographie détermine sur V une involution cyclique du troisième ordre.

Nous supposerons que les formes φ_3', φ_3'' sont générales de sorte que la variété V ne passe pas par les points O_{33}, O_{44}. Par contre la variété V contient la courbe C_0, intersection du cône Γ_0 avec V_9^3, courbe dont tous les points sont unis pour l'involution.

Puisque la variété V est située sur le cône W', on peut tenir compte dans l'équation V_9^3 des équations de la variété W'. Ces réductions faites, on trouve que l'équation de l'hypersurface V_9^3 dépend de 55 termes.

Nous désignerons par Ω une image de l'involution I déterminée par H sur V. Notons qu'on pourrait prendre comme modèle projectif de Ω la variété obtenue en rapportant aux hyperplans d'un espace à 53 dimensions les variétés d'équations analogues à l'équation de V_9^3 mais dont les coefficients sont variables.

5. Dans l'espace S_3, les plans unis pour l'homographie *h* sont les plans passant par O_3O_4 et les plans $O_1O_2O_3$ et $O_1O_2O_4$. Dans chacun des premiers, *h* détermine une homographie non homologique et dans les deux derniers une homologie. En correspondance, nous avons sur V un faisceau de surfaces F transformées en elles-mêmes par H; nous les désignerons par F_0. Aux deux derniers plans correspondent des surfaces F que nous désignerons par F_1, F_2. Ces surfaces contiennent la courbe C_0.

Les surfaces F_0 forment un faisceau ayant pour base une courbe C que nous désignerons par C_{34}. Elle est située sur le cône de W' correspondant à la droite O_3O_4.

La courbe C_{34} est transformée en soi par H et sur la courbe, cette homographie détermine une involution d'ordre trois privée de points unis. Cette involution a pour image une courbe G_{34} de genre deux tracée sur Ω.

Envisageons une surface F_0 déterminée. Elle rencontre la courbe C_0 en trois points. La surface F_0 contient donc une involution cyclique d'ordre trois ayant trois points unis. Ces points sont évidemment de même espèce. S'ils sont de première espèce, entre le genre arithmétique $p_a = 3$ de F_0 et celui p'_a d'une surface Φ_0 image de l'involution. on a la relation

$$12(p_a + 1) = 3.12(p'_a + 1) - 3.4,$$

équation impossible en nombres entiers. Donc les points unis sont de seconde espèce et on a la relation

$$12(p_a + 1) = 3.12(p'_a + 1) - 3.8,$$

d'où $p'_a = 1$.

On a donc sur la variété Ω un faisceau de surfaces Φ_0 de genres $p_a = p_g = 1$ ayant pour base une courbe G_{34} de genre deux.

6. Examinons la surface F_1, qui contient la courbe unie C_0. L'involution déterminée par H sur F_1 possède donc une courbe de points unis. Soit Φ_1 la surface image de l'involution appartenant à la surface F_1.

Entre les surfaces Φ_1 et F_1 nous avons une correspondance (1,3) et d'après un théorème d'Enriques, à la courbe canonique de Φ_1 correspond sur F_1 une courbe qui, jointe à la courbe de coïncidence, donne une courbe canonique de F_1. Or actuellement, la courbe canonique de F_1 coïncide avec la courbe de coïncidence, de sorte que la surface Φ_1 est privée de courbe canonique et a le genre $p_g = 0$.

A la surface F_2 correspond de même sur Ω une surface Φ_2 de genre $p_g = 0$.

7. Retournons aux surfaces F_0. Sur une de ces surfaces, le système canonique possède trois courbes transformées en elles-mêmes par H. Ce sont la courbe C_{34} et les courbes C_1, C_2 découpées par les surfaces F_1, F_2. Ces deux dernières courbes passent par les trois points unis de l'involution appartenant à la surface F_0 considérée. On sait qu'à la courbe canonique de la surface Φ_0 image de l'involution, correspond

sur F_0 une courbe canonique ne passant pas par les points unis. La courbe canonique de la surface Φ_0 est donc la courbe G_{34}.

Observons qu'aux courbes C_1, C_2 correspondent respectivement des courbes elliptiques G_1, G_2. Les surfaces Φ_1, Φ_2 contiennent donc chacune un faisceau de courbes elliptiques.

Les surfaces Φ_1, Φ_2 ont en commun la courbe qui correspond sur Ω à la courbe C_0. Cette courbe, G_0, est de genre quatre et les courbes G_1, G_2 la rencontre en des termes de points.

La courbe G_{34} est la base du faisccau de surfaces Φ_0 et est d'autre part la courbe canonique unique de ces surfaces. On voit donc que l'adjointe à une surface Φ_0 est une surface Φ_0, c'est-à-dire que le faisceau $| \Phi_0 |$ est son propre adjoint. On en déduit que la variété Ω possède une surface canonique d'ordre zéro.

Liège, le 26 juin 1973.