Bulletin de la Classe des sciences

Variétés algébriques dont les sections hyperplanes sont privées de variété canonique

Lucien Godeaux

Résumé
Comme application de la théorie des involutions cycliques, nous construisons des variétés algébriques dont les sections hyperplanes sont privées de variété canonique. Nous examinons ensuite les sections de ces variétés par certaines hypersurfaces.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Variétés algébriques dont les sections hyperplanes sont privées de variété canonique

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Comme application de la théorie des involutions cycliques [1], nous construisons des variétés algébriques dont les sections hyperplanes sont privées de variété canonique. Nous examinons ensuite les sections de ces variétés par certaines hypersurfaces.

Nous considérons dans un espace linéaire à $p-1$ dimensions, une variété d'ordre p transformée en soi par une homographie cyclique d'ordrc p. L'involution engendrée sur cette variété par l'homographie a pour image une variété d'ordre p^{p-2} dont les sections hyperplanes sont privées de variété canonique. Nous considérons ensuite les sections de cette variété par des hypersurfaces d'ordre inférieur à p.

1. Considérons dans un espace S_{p-1} à $p-1$ dimensions une homographie H d'équations

$$x'_0 : x'_1 : \ldots : x'_{p-1} = x_0 : \varepsilon x_1 : \ldots : \varepsilon^{p-1} x_{p-1},$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité et $p > 2$ un nombre premier. L'homographie H a comme points unis les sommets O_0, $O_1, \ldots, O_{p-1}$ de la figure de référence.

Les variétés algébriques V transformées en elles-mêmes par l'homo-

---

(1) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Ediz. Cremonese, 1963).

graphie H forment p systèmes linéaires $|V_0|$, $|V_1|$, ..., $|V_{p-1}|$ dont l'un, que nous supposerons être $|V_0|$ est privé de points-base. Sur un côté O_iO_k de la figure de référence, les variétés V_0 découpent ∞^1 groupes de p points unis pour H, tandis que les autres variétés découpent un seul de tels groupes. Il en résulte que $|V_0|$ a une dimension d'une unité supérieure à celle des autres systèmes.

Le nombre des hypersurfaces d'ordre p de S_{p-1} linéairement indépendantes est

$$\binom{2p-1}{p-1}$$

et par conséquent si r est la dimension de $|V_0|$, on a

$$pr + 1 = \binom{2p-1}{p-1}.$$

Rapportons projectivement les variétés V_0 aux hyperplans d'un espace S_r à r dimensions, il correspond aux groupes de l'involution I engendrée par H dans S_{p-1} les points d'une variété W d'ordre p^{p-2}, normale.

2. La variété canonique d'une variété V est découpée par une hypersurface d'ordre $p - p = 0$, c'est-à-dire que cette variété canonique est d'ordre zéro, ou encore que tout système linéaire de variétés à $p - 2$ dimensions tracées sur V est son propre adjoint.

Considérons une variété $\overline{V}_0$ de $|V_0|$ et soit $\overline{\Omega}_0$ la variété qui lui correspond sur W (section hyperplane de W). Le système canonique de $\overline{V}_0$ est découpé par les variétés V de S_{p-1} et dans ce système, il y a p systèmes linéaires appartenant à l'involution I engendrée par H sur $\overline{V}_0$, ce sont les systèmes $|(\overline{V}_0,V_0)|$, $|(\overline{V}_0,V_1)|$, ..., $|(\overline{V}_0,V_{p-1})|$. Ils ont tous la dimension r. Le système canonique de $\overline{\Omega}_0$ correspond à un de ces systèmes. Nous avons démontré récemment que ce système canonique n'existait pas [1], c'est-à-dire que la variété $\overline{\Omega}_0$ est dépourvue de variété canonique. On en conclut que *Les sections hyperplanes de la variété* W *sont dépourvues de variété canonique.*

---

[1] *Construction de variétés algébriques dépourvues de variété canonique* (Atti della Accademia delle Scienze di Bologna, 1972, pp. 32-36).

Si nous désignons par Ω_i les variétés qui correspondent sur W respectivement aux variétés $V_1, V_2, \ldots, V_{p-1}$, on a

$$p\Omega_0 \equiv p\Omega_1 \equiv \ldots \equiv p\Omega_{p-1}$$

par un raisonnement bien connu.

3. Les hyperquadriques de S_{p-1} linéairement indépendantes sont au nombre de $p(p+1):2$. Celles qui sont transformées en elles-mêmes par H forment p systèmes linéaires $|Q_0|, |Q_1|, \ldots, |Q_{p-1}|$. L'un d'eux est privé de points-bas, nous supposerons que c'est $|Q_0|$. En posant $p = 2\nu + 1$, les équations de ces systèmes peuvent s'écrire

$$\varphi_0 \equiv \lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1 x_{p-1} + \lambda_2 x_2 x_{p-2} + \ldots + \lambda_\nu x_\nu x_{\nu+1} = 0,$$

$$\varphi_1 \equiv \lambda_0 x_{\nu+1}^2 + \lambda_0 x_0 x_1 + \lambda_2 x_2 x_{p-1} + \ldots + \lambda_\nu x_\nu x_{\nu+2} = 0,$$

...

L'homographie

$$T = \begin{pmatrix} x_0 & x_{p-1} & x_{p-2} & x_{p-3} & \cdots & x_1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & & x_{p-1} \end{pmatrix}$$

transforme l'équation $\varphi_0 = 0$ en soi et $\varphi_1 = 0$ en

$$\varphi_{p-1} \equiv \lambda_0 x_\nu^2 + \lambda_1 x_0 x_{p-1} + \lambda_2 x_1 x_{p-2} + \ldots + \lambda_\nu x_{\nu+1} x_{\nu-1} = 0.$$

D'une manière généralc, on voit que T et ses différentes puissances transforment les unes dans les autres les équations des systèmes de quadriques $|Q_1|, |Q_2|, \ldots, |Q_{p-1}|$.

On en conclut que ces systèmes ont tous la même dimension ν. On a d'ailleurs

$$p(\nu + 1) = \frac{1}{2} p(p+1).$$

Dorénavant, nous désignerons par $|Q_i|$ le système des variétés découpées sur $\overline{V}_0$ par les systèmes d'hyperquadriques $|Q_i|$, aucune confusion n'étant possible.

Considérons une variété $\overline{Q}_0$ de $|Q_0|$ et soit $\overline{Q}'_0$ la variété qui lui correspond sur W. Au système canonique de $\overline{Q}'_0$ correspond sur $\overline{Q}_0$ un système de courbes canoniques. Les courbes canoniques de $\overline{Q}_0$ sont découpées par les systèmes de variétés $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{p-1}$. Le premier a la dimension $\nu - 1$, les autres la dimension ν. La variété

$\overline{Q}_0$ ayant la dimension $p - 3$, nombre pair, nous avons démontré que c'est le premier système qui a la dimension minimum qui est le transformé du système canonique de $\overline{Q}'_0$ [1]. Cette variété a donc le genre géométrique $P_g = \nu$.

On observera que le même raisonnement peut être fait pour les variétés Q_i donc *Aux sections de la variété* $\overline{V}_0$ *par des hyperquadriques, correspondent sur* W *des variétés de dimension* $p - 3$ *et de genre géométrique* $P_g = \nu$.

4. Supposons $p > 4$ et désignons par M les variétés à $p - 3$ dimensions découpées sur $\overline{V}_0$ par les hypersurfaces d'ordre quatre de S_{p-1}. Celles de ces hypersurfaces transformées en elles-mêmes par H forment p systèmes linéaires ayant la même dimension. En effet, sur un côté O_iO_k de la figure de référence, un de ces systèmes détermine cinq groupes de points unis pour H et d'autre part, l'équation $\varphi_0\varphi_i = 0$ détermine un de ces systèmes, quelque soit i.

Nous désignerons par $| M_0 |$, $| M_1 |$, ..., $| M_{p-1} |$ les systèmes de variétés du système $| M |$ découpés par les hypersurfaces d'ordre quatre transformées en elles-mêmes par H. L'équation des hypersurfaces découpant les variétés M_i se reproduisant multipliée par ε^i lorsque l'on effectue H. Le nombre r' des variétés M_i linéairement indépendantes est donné par

$$pr' = \binom{p+3}{4},$$

c'est-à-dire

$$r' = \frac{1}{24}(p^3 + 6p^2 + 11p + 6).$$

Soient $\overline{M}_0$ une variété du système $| M_0 |$ et $\overline{M}'_0$ la variété qui lui correspond sur W. Le système $| M |$ étant son propre adjoint, dans le système canonique de $\overline{M}_0$ il y a p systèmes appartenant à l'involution I engendrée par H. Ils sont découpés par les systèmes $| M_0 |$, $| M_1 |$, ..., $| M_{p-1} |$ et ont, le premier la dimension $r' - 2$ et les autres la dimension $r' - 1$. Comme la dimension de $\overline{M}_0$ est un nombre pair $p - 3$, au système canonique de la variété $\overline{M}'_0$ correspond le

(1) *Sur une propriété des correspondances rationnelles entre deux variétés algébriques* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1938, pp. 291-297).

système découpé sur $\overline{M}_0$ par le système $| M_0 |$. Le genre géométrique de la variété $\overline{M}_0$ est égal à $r' - 1$.

Le même raisonnement est applicable aux variétés $M_1, M_2, \ldots, M_{p-1}$ de sorte que *Aux sections de la variété* $\overline{V}_0$ *par les hypersurfaces du quatrième ordre de* S_{p-1} *lorsque* $p > 4$, *correspondent sur* W *des variétés de genre géométrique* $P_g = r' - 1$.

5. Le système bicanonique de la variété $\overline{Q}'_0$ correspond sur $\overline{Q}_0$ le double du système découpé par les variétés Q_0, c'est-à-dire le système découpé par les variétés M_0 ne contenant pas $\overline{Q}_0$. Les variétés M_0 formées de la variété $\overline{Q}_0$ et d'une variété de $| Q_0 |$, sont au nombre de v linéairement indépendantes. Il en résulte que le système bicanonique de $\overline{Q}'_0$ contient $r' - v - 1$ variétés linéairement indépendantes et le bigenre de cette variété est donc $P_2 = r' - v - 1$.

Aux sections de la variété $\overline{V}_0$ *par des hyperquadriques* S_{p-1} *de correspondent sur* W *des variétés dont le bigenre est égal à* $r' - v - 1$.

6. Supposons $p = 5$. La variété $\overline{V}_0$ est du cinquième ordre dans un espace S_4.

On a $r = 25$ et la variété W est d'ordre $5^3 = 125$, dans un espace S_{24} à 24 dimensions. Les sections hyperplanes de W sont des surfaces privées de courbe canonique.

Aux sections de $\overline{V}_0$ par des hyperquadriques de S_4 correspondent sur W des surfaces de genre géométrique $p_g = 2$. Ces surfaces sont de genre linéaire $p^{(1)} = 8$ et par conséquent de bigenre 11. Effectivement, on a $r' = 14$ et il y a sur $\overline{V}_0$ trois surfaces M_0 constituée de deux variétés Q_0 contenant comme partie $\overline{Q}_0$.

Aux variétés d'intersection de $\overline{V}_0$ et des hypersurfaces d'ordre quatre, composées au moyen de I, correspondent des surfaces d'ordre 4^4, de genre géométrique $p_g = 13$.

Toutes ces surfaces sont régulières.

Liège, le 20 avril 1973.