COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Étude de quelques involutions cycliques appartenant à des surfaces algébriques

par Lucien Godeaux, Membre de l'Académie.

Dans cette note, nous nous proposons d'appliquer à quelques exemples la théorie des involutions cycliques, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique, que nous avons développée dans des travaux antérieurs (1).

Dans un travail récent (2), nous avons montré que l'on peut construire, sur une certaine surface algébrique de genres $p_a = p_g = \frac{1}{3}\nu(\nu-1)(2\nu-1)$, une involution cyclique, ayant quatre points unis, dont l'ordre est un nombre premier de la forme $p = 4\nu^2+1$, qui est rationnelle, et nous avons étudié en détail le cas $\nu = 4$. Lorsque p n'est pas premier, mais conserve la même forme, l'involution est encore

(1) Voir notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Actualités scient. et indust.*, Paris, Hermann, 1934).

(2) *Sur une involution rationnelle n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface de genre quatre* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1940, pp. 9-17).

rationnelle, mais possède en général une infinité de points unis. Nous considérons ici le cas $\nu=7$, $p=50$; l'involution est alors composée au moyen de deux involutions cycliques, l'une d'ordre cinq, l'autre d'ordre vingt-cinq, possédant chacune quatre points unis. Ce sont ces involutions que nous étudions. La première nous conduit à une surface projectivement canonique (c'est-à-dire dont les sections hyperplanes forment le système canonique) de genres $p_a=p_g=7$, $p^{(1)}=25$.

Nous étudions ensuite une involution cyclique d'ordre sept, présentant trois points unis, appartenant à une surface algébrique de genres $p_a=p_g=10$. La surface-image de cette involution possède une courbe elliptique isolée qui, comptée deux fois, est la courbe canonique de la surface; comptée quatre fois, elle est la courbe bicanonique de la surface. Il se présente ici ce fait curieux : la courbe qui correspond à cette courbe bicanonique sur la surface portant l'involution, appartient à un système linéaire composé au moyen de l'involution, dont toutes les courbes ne correspondent pas à des courbes bicanoniques de la surface image.

I

1. Considérons la surface F, du huitième ordre, d'équation

$$a_1 x_1^7 x_2 + a_2 x_2^7 x_3 + a_3 x_3^7 x_4 + a_4 x_4^7 x_1 = 0 ;$$

elle est transformée en elle-même par l'homographie

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} x_1 & \varepsilon x_2 & \varepsilon^{44} x_3 & \varepsilon^{43} x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

où ε est une racine primitive d'ordre 50 de l'unité. L'involution I_{50}, engendrée sur F par l'homographie de période 50, H, possède quatre points unis, simples pour la surface, aux sommets O_1, O_2, O_3, O_4 du tétraèdre de référence. Cette involution est rationnelle car les quadriques

$$\lambda_1 x_1 x_3 + \lambda_2 x_2 x_4 = 0$$

découpent sur la surface F des courbes unies pour l'homographie H; ces courbes sont de genre 49 et passent simplement par les points unis de l'involution I_{50}; sur chacune d'elles, H détermine une involution ayant quatre points unis et par conséquent rationnelle. Une surface-image de l'involution contient donc un faisceau linéaire de courbes rationnelles et est par suite rationnelle.

Observons d'ailleurs que les droites $O_1O_2(x_3=x_4=0)$ et $O_3O_4(x_1=x_2=0)$ appartiennent à la surface F et sont les axes de l'homographie biaxiale harmonique H^{25}.

La surface F est transformée en elle-même par les homographies H^{10} et H^2, la première de période cinq, la seconde de période vingt-cinq. Ces homographies engendrent sur F des involutions I_5, I_{25} ayant chacune quatre points unis : les sommets O_1, O_2, O_3, O_4 du tétraèdre de référence. Nous allons nous occuper de ces involutions.

2. La surface F n'est pas la surface du huitième ordre la plus générale transformée en elle-même par l'homographie

$$T = \begin{pmatrix} x_1 & \eta x_2 & \eta^4 x_3 & \eta^3 x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

où $\eta = \varepsilon^{10}$ est une racine primitive cinquième de l'unité. Nous désignerons par F_1 cette surface plus générale; son équation s'écrit

$$\begin{aligned} & a_{11} x_1^7 x_2 + a_{12} x_2^7 x_3 + a_{13} x_3^7 x_4 + a_{14} x_4^7 x_1 + \\ + & a_{21} x_1^5 x_3^2 x_4 + a_{22} x_2^5 x_4^2 x_1 + a_{23} x_3^5 x_1^2 x_2 + a_{24} x_4^5 x_2^2 x_3 + \\ + & a_{31} x_1^6 x_4^2 + a_{32} x_2^6 x_1^2 + a_{33} x_3^6 x_2^2 + a_{34} x_4^6 x_3^2 + \\ + & a_{41} x_1^5 x_2^2 x_3 + a_{42} x_2^5 x_3^2 x_4 + a_{43} x_3^5 x_4^2 x_1 + a_{44} x_4^5 x_1^2 x_2 + \\ + & a_{51} x_1^3 x_2^2 x_4^3 + a_{52} x_2^3 x_3^2 x_1^3 + a_{53} x_3^3 x_4^2 x_2^3 + a_{54} x_4^3 x_1^2 x_3^3 + \\ + & b_1 x_1^4 x_3^4 + b_2 x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 + b_3 x_2^4 x_4^4 = 0 . \end{aligned}$$

Nous désignerons encore par I_5 l'involution engendrée sur F_1 par l'homographie T.

3. Commençons par étudier les points unis de l'involution I_5. A cause de la symétrie de l'équation de F_1, il suffira d'étudier l'un d'eux, par exemple O_1.

Le plan tangent $x_2=0$ à la surface F_1 en O_1 est uni pour l'homographie T et celle-ci détermine, dans ce plan, une homographie non homologique ayant trois points unis O_1, O_3, O_4. Il existe donc, dans le voisinage de O_1, deux points unis de I_5 situés respectivement sur les droites O_1O_3, O_1O_4. Examinons le premier de ces points.

Effectuons la transformation quadratique

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_2 y_4 : y_1 y_4 : y_3 y_4 ,$$

dont l'inverse a pour équations

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 x_3 : x_1 x_2 : x_1 x_4 : x_3^2 .$$

Au point infiniment voisin de O_1 sur la droite O_1O_3 correspond le point O'_1 $(y_2=y_3=y_4=0)$.

A la surface F_1 correspond une surface F'_1 dont l'équation, ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de y_1, commence par le terme $a_1 y_1^{14} y_2$. Cette surface passe donc simplement par O'_1 il a comme plan tangent en ce point, $y_2=0$.

A l'homographie T correspond l'homographie

$$\begin{pmatrix} y_1 & \eta^2 y_2 & \eta^4 y_3 & \eta^4 y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix} .$$

Dans le plan $y_2=0$, cette homographie détermine une homologie de centre O'_1, par conséquent elle engendre, sur la surface F'_1, une involution du cinquième ordre dont le point O'_1 est uni parfait. Il en résulte que sur la surface F'_1, le point infiniment voisin de O_1 sur la droite O_1O_3 est uni parfait pour l'involution I_5. Nous avons démontré (¹) que, dans ce cas, au point infiniment voisin de O_1 sur la droite O_1O_4, fait suite un point uni parfait de l'involution I_5.

4. Désignons par Φ_1 la surface image de l'involution I_5. Aux courbes canoniques de Φ correspondent sur F_1 des courbes canoniques de cette surface qui doivent passer par

(¹) *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique*, 1930, pp. 450-467).

le point infiniment voisin de O_1 sur la droite O_1O_3 [1]. De même, ces courbes doivent passer par les points infiniment voisins de O_2 sur la droite O_2O_4, de O_3 sur la droite O_3O_1, de O_4 sur la droite O_4O_2. En d'autres termes, ces courbes doivent toucher en O_1, O_3 la droite O_1O_3 et en O_2, O_4, la droite O_2O_4. De plus, ces courbes doivent être transformées en elles-mêmes par l'homographie T. La surface F_1 étant du huitième ordre, ces courbes sont découpées par les adjointes d'ordre quatre touchant en O_1, O_3 la droite O_1O_3 et en O_2, O_4 la droite O_2O_4, transformées en elles-mêmes par T. On trouve aisément que ces adjointes ont pour équation

$$\lambda_1 x_1^3 x_4 + \lambda_2 x_2^3 x_1 + \lambda_3 x_3^3 x_2 + \lambda_4 x_4^3 x_3 + \lambda_5 x_1^2 x_3^2 + \lambda_6 x_2^2 x_4^2 + \\ + \lambda_7 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0 .$$

Pour obtenir un modèle projectif de la surface Φ_1, rapportons trajectivement ces surfaces aux hyperplans d'un espace linéaire S_6 à six dimensions, en posant

$$\frac{X_0}{x_1x_2x_3x_4} = \frac{X_1}{x_1^3x_4} = \frac{X_2}{x_2^3x_1} = \frac{X_3}{x_3^3x_3} = \frac{X_4}{x_4^3x_3} = \frac{X_5}{x_1^2x_3^2} = \frac{X_6}{x_2^2x_4^2} .$$

En éliminant les x entre ces équations et celle de F_1, on trouve les équations de la surface Φ_1 sous la forme

$$X_0^2 = X_5 X_6 , \quad X_1 X_3 = X_0 X_5 , \quad X_2 X_4 = X_0 X_6 ,$$

$$a_{11} X_1^2 X_2 X_5 + a_{12} X_2^2 X_3 X_6 + a_{13} X_3^2 X_4 X_5 + a_{14} X_4^2 X_1 X_6 \\ + X_0^2 (a_{21} X_1 X_5 + a_{22} X_2 X_6 + a_{23} X_3 X_5 + a_{24} X_4 X_6 + \\ + a_{31} X_1^2 + a_{32} X_2^2 + a_{33} X_3^2 + a_{34} X_4^2) + \\ + X_0 (a_{41} X_1 X_2 X_5 + a_{42} X_2 X_3 X_6 + a_{43} X_3 X_4 X_5 + \\ + a_{44} X_4 X_1 X_6 + a_{51} X_1 X_2 X_4 + a_{52} X_2 X_3 X_1 + \\ + a_{53} X_3 X_4 X_2 + a_{54} X_4 X_1 X_3) + \\ + X_0^2 (b_1 X_5^2 + b_2 X_5 X_6 + b_3 X_6^2) = 0 .$$

Les hypersurfaces représentées par les équations précédentes ont en commun huit plans

$$X_0 = 0 , \quad X_1 X_3 = 0 , \quad X_2 X_4 = 0 , \quad X_5 X_6 = 0 .$$

Par conséquent, la surface Φ_1 est d'ordre vingt-quatre.

---

[1] *Idem* (quatrième communication). (*Idem*, 1935, pp. 338-344.)

Les courbes qui correspondent sur F_1 aux sections hyperplanes de Φ_1 forment d'ailleurs un système linéaire de degré $16 \times 8 - 8 = 15 \times 8$. Ces courbes sont de genre 129; en appliquant la formule de Zeuthen, on trouve que les sections hyperplanes de Φ_1 sont de genre vingt-cinq. La surface Φ_1 est une surface projectivement canonique, de genres $p_a = p_g = 7$, $p^{(1)} = 25$.

5. On peut obtenir un modèle projectif normal de la surface Φ_1 appartenant à l'espace ordinaire. Posons à cet effet

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = x_1^2 x_2 : x_2^2 x_3 : x_3^2 x_4 : x_4^2 x_1 .$$

En éliminant les x entre ces équations et l'équation de F_1, on trouve

$$\begin{aligned}
&(a_{11} z_1 + a_{21} z_2 + a_{31} z_3 + a_{41} z_4) z_1^4 z_3^2 z_4 + \\
&+ (a_{12} z_2 + a_{22} z_3 + a_{32} z_4 + a_{42} z_1) z_2^4 z_4^2 z_1 + \\
&+ (a_{13} z_3 + a_{23} z_4 + a_{33} z_1 + a_{43} z_2) z_3^4 z_1^2 z_2 + \\
&+ (a_{14} z_4 + a_{24} z_1 + a_{34} z_2 + a_{44} z_3) z_4^4 z_2^2 z_3 + \\
&+ (a_{51} z_1 z_2 z_4^2 + a_{52} z_2 z_3 z_1^2 + a_{53} z_3 z_4 z_2^2 + a_{54} z_4 z_1 z_3^2) z_1 z_2 z_3 z_4 + \\
&+ b_1 z_1^4 z_3^4 + b_2 z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2 + b_3 z_2^4 z_4^4 = 0 .
\end{aligned}$$

C'est une surface du huitième ordre possédant quatre droites doubles tacnodales : les droites $z_1 = z_4 = 0$, $z_2 = z_1 = 0$, $z_3 = z_2 = 0$, $z_4 = z_3 = 0$, les plans tangents le long de ces droites étant respectivement $z_4 = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ et $z_3 = 0$.

Les courbes canoniques sont découpées sur cette surface par les adjointes

$$\lambda_1 z_1^2 z_3 z_4 + \lambda_2 z_2^2 z_4 z_1 + \lambda_3 z_3^2 z_1 z_2 + \lambda_4 z_4^2 z_2 z_3 + \lambda_5 z_1^2 z_3^2 + \lambda_6 z_2^2 z_4^2 + \lambda_7 z_1 z_2 z_3 z_4 = 0 .$$

6. Nous allons maintenant nous occuper de l'involution I_{25}, d'ordre 25, engendrée sur la surface F par l'homographie H^2. Nous remplacerons la surface F par la surface plus générale F_2 d'équation

$$a_1 x_1^7 x_2 + a_2 x_2^7 x_3 + a_3 x_3^7 x_4 + a_4 x_4^7 x_1 + b_1 x_1^4 x_3^4 + b_2 x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 + b_3 x_2^4 x_4^4 = 0 .$$

Cette surface est transformée en elle-même par l'homographie

$$T_1 = \begin{pmatrix} x_1 & \eta x^2 & \eta^{19} x_3 & \eta^{18} x_4 \\ x_1 & x^2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

où l'on a posé cette fois $\eta = \varepsilon^2$ et où l'on a donc $\eta^{25} = 1$.

L'involution I_{25} possède encore les quatre points unis O_1, O_2, O_3, O_4 et nous étudierons l'un d'eux, le point O_1. En raison de la symétrie de l'équation F_2, les propriétés des autres points unis peuvent s'en déduire aisément.

Considérons le système linéaire dépourvu de points-base, formé par les surfaces d'ordre 25 transformées en elles-mêmes par T_1. Ces surfaces découpent sur F^2 un système linéaire $|C|$, composé au moyen de l'involution I^{25}. Pour étudier la structure du point uni O_1, il suffira d'étudier le comportement en ce point des courbes C passant par ce point. Pour faire cette étude, nous remarquerons que l'on peut projeter les courbes C du point O_2 sur le plan $x_2 = 0$, tangent à F_2 en O_1, et se borner à étudier les courbes C′, d'ordre 25, passant par O_1 mais non par O_3, O_4, transformées en elles-mêmes par T_1.

Dans le plan $x_2 = 0$, l'homographie T_1 détermine l'homographie

$$\begin{pmatrix} x_1 & \varphi x_3 & \varphi^{22} x_4 \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

où l'on a pasé $\zeta = \eta^{19}$. Les courbes C′ ont pour équation

$$\sum_{i=1}^{6} \lambda_i x_1^{25-4i} x_3^{3i} x_4^{i} + \sum_{j=0}^{3} \mu_j x_1^{14-4j} x_3^{2+3j} x_4^{9+j} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{1} \nu_k x_1^{7-4k} x_3^{1+3k} x_4^{17+k} + \lambda_7 x_3^{25} + \lambda_8 x_4^{25} = 0 .$$

En O_1, ces courbes ont un point quadruple, trois tangentes étant confondues avec $x_3 = 0$ et la dernière avec $x_4 = 0$.

En effectuant 21 fois la transformation quadratique

$$x_1 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_1 y_3 : y_3 y_4 ,$$

nous obtenons une courbe d'équation

$$y_1^{25\times 21}(\lambda_1 y_4 + \lambda_7 y_3) + \dots = 0\ ,$$

les termes non écrits contenant y_1 à une puissance inférieure. Par conséquent, les courbes C' ont une suite de 21 points simples infiniment voisins successifs de O_1, le premier étant sur $x_4 = 0$. Ces points sont unis par l'involution I_{25} et le dernier est uni parfait [1].

Effectuons maintenant sur les courbes C' sept fois la transformation

$$x_1 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_3 y_4 : y_1 y_4\ ;$$

nous obtenons des courbes d'équation

$$y_1^{175}(\lambda_1 y_3^3 + \mu_0 y_3^2 y_4 + \nu_0 y_3 y_4^2 + \lambda_8 y_4^3) + \dots = 0\ ,$$

les termes non écrits contenant y_1 à des puissances inférieures. Il en résulte que les courbes C' ont en commun sept points triples infiniment voisins successifs de O_1, le premier étant sur $x_3 = 0$. Ces points sont unis par I_{25} et le dernier est uni parfait.

Cela étant, si Φ_2 est la surface-image de l'involution I_{25} et si nous prenons comme modèle projectif de cette surface une surface sur laquelle les quatre points de diramation sont isolés, ceux-ci seront des points quadruples de la surface, le cône tangent en chaque point étant formé d'un plan et d'un cône cubique (rationnel) ayant une seule droite en commun. Le domaine d'un de ces points de diramation sera équivalent à deux courbes rationnelles ayant un point commun, l'une de degré -2, l'autre de degré -4; cette dernière sera rencontrée en deux points par les courbes canoniques de la surface Φ_2.

---

(1) *Sur les homographies planes cycliques* (*Mémoires de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1928); *Sur les surfaces représentant les involutions planes engendrées par des homographies cycliques* (*Idem.*, 1930); *Sur les courbes tracées sur la surface représentant l'involution engendrée par une homographie plane cyclique* (*Idem.*, 1931).

7. D'après ce qui vient d'être établi, il existe une suite de sept points unis de l'involution I_{25}, infiniment voisins successifs de O_1, dont le premier est sur la droite O_1O_4 et dont le dernier est uni parfait. Les transformées des courbes canoniques de la surface Φ_2 doivent passer doublement par le dernier de ces points et elles ont par conséquent un point double en O_1 auquel font suite sept points doubles infiniment voisins successifs.

De même, les courbes qui correspondent sur F_2 aux courbes canoniques de Φ_2 passent doublement par O_2 et par sept points infiniment voisins successifs dont le premier est sur O_2O_1; par O_3 et par sept points infiniment voisins successifs dont le premier est sur O_3O_2; enfin par O_4 et par sept points infiniment voisins successifs dont le premier est sur O_4O_3. Ces courbes, qui sont des courbes canoniques particulières de F_2, forment un système de degré $16 \times 8 - 4 \times 4 \times 8 = 0$. Elles sont transformées en elles-mêmes par T_1 et il est facile de voir qu'elles sont découpées sur F_2 par les surfaces

$$\lambda_1 x_1^2 x_3^2 + \lambda_2 x_2^2 x_4^2 + \lambda_3 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0 .$$

Les courbes en question sont donc formées des couples de courbes du faisceau découpé sur F_2, par les quadriques

$$\lambda_1 x_1 x_3 + \lambda_2 x_2 x_4 = 0 .$$

A ces dernières courbes correspondent, sur Φ_2, des courbes elliptiques, comme on le vérifie en appliquant la formule de Zeuthen. Il en résulte que les courbes canoniques de Φ_2 sont les couples de courbes d'un faisceau linéaire de courbes elliptiques. On a donc, pour cette surface, $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 1$.

8. On peut vérifier directement sur la surface F_2 la structure du point uni O_1. Nous montrerons, par exemple, qu'au point O_1 font suite sept points unis de l'involution I_{25} dont le dernier est uni parfait et dont le premier est sur la droite O_1O_4.

Considérons à cet effet la transformation quadratique θ d'équations

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_2 y_4 : y_3 y_4 : y_1 y_4 ,$$

dont l'inverse a pour équations

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_3 = x_1 x_4 : x_1 x_2 : x_1 x_3 : x_4^2 .$$

Au point infiniment voisin de O_1 sur la droite O_1O_4, θ fait correspondre le point O'_1 (1, 0, 0, 0).

Effectuons λ fois la transformation θ. A la surface F correspond une surface passant simplement par le point $y_2 = y_3 = y_4 = 0$ et y ayant comme plan tangent le plan $y_2 = 0$. A l'homographie T_1 correspond l'homographie

$$\begin{pmatrix} \eta^{18\lambda} y_1 & \eta y_2 & \eta^{19} y_3 & \eta^{18(\lambda+1)} y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix} .$$

Pour $\lambda = 7$, 19 et 18 $(\lambda + 1)$ sont congrus par rapport à 25, ce qui démontre l'existence des sept points unis, infiniment voisins successifs de O_1, dont le dernier est uni parfait.

II

9. La seconde involution dont nous voulons nous occuper est engendrée sur la surface F d'équation

$$a_1 x_1^5 x_2 + a_2 x_2^5 x_3 + a_3 x_3^5 x_1 + a_4 x_4^6 + a_5 x_4^3 x_1 x_2 x_3 +$$
$$+ x_4^2 (b_1 x_1^3 x_3 + b_2 x_2^3 x_1 + b_3 x_3^3 x_2) + x_4 (c_1 x_1^3 x_2^2 + c_2 x_2^3 x_3^2 +$$
$$+ c_3 x_3^3 x_1^2) = 0 ,$$

invariante pour l'homographie de période sept

$$T = \begin{pmatrix} x_1 & \varepsilon x_2 & \varepsilon^3 x_3 & \varepsilon^6 x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} ,$$

où ε est une racine primitive septième de l'unité. L'involution engendrée par T sur F est donc une involution I_7 d'ordre sept; elle présente trois points unis O_1, O_2, O_3.

Commençons par étudier la structure du point uni O_1. Dans le plan tangent $x_2 = 0$ à la surface en ce point, T détermine une homographie non homologique dont les points unis sont O_1, O_3, O_4. Au point O_1 sont donc infiniment voisin deux points unis de l'involution, situés sur les droites O_1O_3 et O_1O_4.

Pour étudier le premier de ces points, effectuons la transformation quadratique

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_2 y_4 : y_1 y_4 : y_3 y_4 ,$$

déjà utilisée plus haut (n° 3). A la surface F correspond une surface F′ passant simplement par le point O'_1 (1, 0, 0, 0) et y ayant comme plan tangent $y_2=0$.

A l'homographie T correspond l'homographie

$$\begin{pmatrix} y_1 & \varepsilon^5 y_2 & \varepsilon^3 y_3 & \varepsilon^3 y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix},$$

ce qui montre que le point O'_1 est uni parfait pour l'involution engendrée sur F′ par cette homographie.

Sur la surface F, au point uni O_1 est donc infiniment voisin, sur la droite O_1O_3, un point uni parfait de l'involution I_7. Il en résulte [1] qu'au point O_1 sont infiniment voisins successifs trois points unis de I_7 dont le premier est situé sur la droite O_1O_4 et dont le dernier est uni parfait. De plus, si Φ est la surface image de l'involution I_7, à une courbe canonique de cette surface correspond sur F une courbe canonique passant doublement par le point infiniment voisin de O_1 sur O_1O_3, c'est-à-dire ayant un tacnode en O_1, la tangente tacnodale étant O_1O_3.

10. En raison de la symétrie de l'équation de F, les deux autres points unis O_2, O_3 de l'involution I_7 présentent des structures analogues et à une courbe canonique de Φ correspond sur F une courbe canonique ayant des tacnodes en O_2, O_3, les tangentes tacnodales étant respectivement O_2O_1, O_3O_2.

Les courbes canoniques de F étant découpées par les

(1) *Recherches sur les involutions... (loc. cit.).*

quadriques, la courbe canonique de F qui correspond à celle de Φ est découpée sur F par la quadrique $x^2 = 0$.

La section de F par le plan $x_4 = 0$ est une sextique de genre dix sur laquelle T engendre une involution d'ordre sept présentant trois points unis et par suite de genre un. La surface Φ possède donc une seule courbe canonique, qui est une courbe elliptique comptée deux fois. Pour cette surface, on a donc $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 1$.

11. Pour obtenir un modèle projectif de la surface Φ, considérons le système linéaire

$$\lambda_0 x_1 x_2 x_3 x_4 + \lambda_1 x_1^3 x_3 + \lambda_2 x_2^3 x_1 + \lambda_3 x_3^3 x_2 + \lambda_4 x_4^4 = 0 . \quad (1)$$

Ce système découpe sur F un système de courbes appartenant à l'involution I_7 et il lui correspond sur Φ un système linéaire complet. Rapportons projectivement les courbes (1) aux hyperplans d'un espace linéaire S_4 en posant

$$\frac{X_0}{x_1 x_2 x_3 x_4} = \frac{X_1}{x_1^3 x_3} = \frac{X_2}{x_2^3 x_1} = \frac{X_3}{x_3^3 x_2} = \frac{X_4}{x_4^4} .$$

En éliminant les x entre ces équations et celle de F, nous obtenons les équations

$$X_0^4 = X_1 X_2 X_3 X_4 ,$$
$$a_1 X_1^2 X_2 + a_2 X_2^2 X_3 + a_3 X_3^2 X_1 + a_4 X_0^2 X_4 + a_5 X_0^3 +$$
$$+ X_0^2 (b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3) + X_0 (c_1 X_1 X_2 + c_2 X_2 X_3 +$$
$$+ c_3 X_3 X_1) = 0 ,$$

d'un modèle projectif de Φ.

Appelons $|C|$ le système linéaire découpé sur F par les surfaces (1) et $|\Gamma|$ le système des sections hyperplanes de Φ. Les courbes C passent simplement par O_1, O_2, O_3 en y touchant respectivement les droites O_1O_4, O_2O_4, O_3O_4. En chacun de ces points, ces courbes ont un contact du troisième ordre (elles passent, par exemple, par les trois points unis de I_7 infiniment voisins successifs de O_1). Le système $|C|$ a par conséquent le degré $16 \times 6 - 3 \times 4 = 84$. La surface Φ doit donc être d'ordre 12. En appliquant la formule de

Zeuthen, on trouve d'autre part que les courbes Γ ont le genre dix.

Parmi les surfaces (1) se trouve la surface $x_4 = 0$ qui découpe sur F la courbe transformée de la courbe canonique de Φ, comptée deux fois. A cette courbe correspond sur Φ une courbe bicanonique de cette surface. Cette courbe est unique, car il doit lui correspondre sur F une courbe ayant des points quadruples en O_1, O_2, O_3, les quatre tangentes étant confondues respectivement avec les droites O_1O_3, O_2O_1, O_3O_2.

Sur la surface Φ, la courbe elliptique

$$X_0 = X_4 = 0\,, \quad a_1 X_1^2 X_2 + a_2 X_2^2 X_3 + a_3 X_3^2 X_1 = 0\,,$$

comptée deux fois, est la courbe canonique; comptée quatre fois, c'est la courbe bicanonique. D'une manière générale, comptée 2 k fois, c'est la courbe k-canonique.

On observera que le système linéaire le plus ample de F, composé au moyen de l'involution I_7 et contenant deux fois la transformée de la courbe canonique de Φ, n'est pas le transformé du système bicanonique de Φ ,mais contient ce transformé.

Liége, le 20 décembre 1940.