EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége.*
Séance du 21 avril 1941. — N° 4.

Sur une homographie hyperspatiale de période quatre,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

En cherchant à étendre aux hyperespaces les considérations qui font l'objet de notre note *sur un groupe d'homographies planes* [1], nous avons rencontré une homographie de période quatre qu'il nous paraît intéressant de signaler.

1. Soient p un nombre premier impair et ε une racine primitive d'ordre p de l'unité. Considérons, dans un espace linéaire S_{p-1} à $p-1$ dimensions, l'homographie H d'équations

$$\begin{aligned}
\rho x'_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_p,\\
\rho x'_2 &= x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \cdots + \varepsilon^{p-1} x_p,\\
\rho x'_3 &= x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^4 x_3 + \cdots + \varepsilon^{p-2} x_p,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\rho x'_p &= x_1 + \varepsilon^{p-1} x_2 + \varepsilon^{p-2} x_3 + \cdots + \varepsilon x_p.
\end{aligned}$$

Nous représenterons cette homographie par la matrice de ses coefficients :

$$\mathrm{H} = (\varepsilon^{(j-1)(k-1)}) \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, p),$$

matrice qui est symétrique.

Nous avons

$$\mathrm{H}^2 = (1 + \varepsilon^{j+k-2} + \cdots + \varepsilon^{i(j+k-2)} + \cdots + \varepsilon^{(p-1)(j+k-2)})$$

et par conséquent, tous les coefficients de H^2 sont nuls, sauf ceux pour lesquels on a $j+k-2 \equiv 0$ (mod. p), qui sont égaux à p. Les équations de H^2 s'écrivent donc

$$\frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_p} = \frac{x'_3}{x_{p-1}} = \cdots = \frac{x'_{p-1}}{x_3} = \frac{x'_p}{x_2}.$$

L'homographie H^2 est donc biaxiale harmonique.

Posons $p = 2\nu + 1$. Les axes ponctuels de H^2 sont :

un espace linéaire σ_ν, à $\frac{1}{2}(p-1) = \nu$ dimensions, d'équations

$$x_2 - x_p = 0,\; x_3 - x_{p-1} = 0, \cdots, x_{\nu+1} - x_{\nu+2} = 0;$$

[1] *Bulletin de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1941, pp. 23-32.

un espace linéaire $\sigma_{\nu-1}$ à $\frac{1}{2}(p-3)=\nu-1$ dimensions, d'équations

$$x_1=0, x_2+x_p=0, x_3+x_{p-1}=0, \cdots, x_{\nu+1}+x_{\nu+2}=0.$$

L'homographie H a la période quatre et possède donc quatre axes ponctuels : deux dans σ_ν et deux dans $\sigma_{\nu-1}$. On a

$$\mathrm{H}^3=(\varepsilon^{p-(j-1)(k-1)}) \qquad (j, k=1,2,\cdots,p).$$

2. Posons

$$y_2=x_2+x_p, y_3=x_3+x_{p-1}, \cdots, y_{\nu+1}=x_{\nu+1}+x_{\nu+2},$$
$$z_2=x_2-x_p, z_3=x_3-x_{p-1}, \cdots, z_{\nu+1}=x_{\nu+1}-x_{\nu+2}.$$

Les équations de σ_ν sont actuellement

$$z_2=z_3=\cdots=z_{\nu+1}=0.$$

Dans cet espace σ_ν, H détermine une homographie biaxiale harmonique dont les axes ponctuels sont ceux de H appartenant à σ et dont les équations s'écrivent

$$\begin{aligned}
\rho x_1' &= x_1+y_2+y_3+\cdots+y_{\nu+1},\\
\rho y_2' &= 2(x_1+y_2\cos\alpha+y_3\cos 2\alpha+\cdots+y_{\nu+1}\cos\nu\alpha),\\
\rho y_3' &= 2(x_1+y_2\cos 2\alpha+y_3\cos 4\alpha+\cdots+y_{\nu+1}\cos 2\nu\alpha),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\rho y_{\nu+1}' &= 2(x_1+y_2\cos\nu\alpha+y_3\cos 2\nu\alpha+\cdots+y_{\nu+1}\cos\nu^2\alpha),
\end{aligned}$$

où nous avons posé $\alpha=\dfrac{2\pi}{p}$. Nous désignerons cette homographie par H_1.

Soient r_1, r_2 les dimensions des axes ponctuels de H_1; nous avons

$$r_1+r_2=\nu-1.$$

L'équation caractéristique de H_1 :

$$\begin{vmatrix}
1-\rho & 1 & 1 & \cdots & 1\\
2 & 2\cos\alpha-\rho & 2\cos 2\alpha & \cdots & 2\cos\nu\alpha\\
2 & 2\cos 2\alpha & 2\cos 4\alpha-\rho & \cdots & 2\cos 2\nu\alpha\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\
2 & 2\cos\nu\alpha & 2\cos 2\nu\alpha & \cdots & 2\cos\nu^2\alpha-\rho
\end{vmatrix}=0 \quad (1)$$

admet deux racines ρ_1, ρ_2. Si ρ_1 correspond à l'axe ponctuel de dimensions r_1, le déterminant de l'équation (1), où l'on pose $\rho=\rho_1$, a la caractéristique $\nu-r_1$, c'est-à-dire que tous les déterminants à $\nu+1-r_1$ lignes et colonnes que l'on en déduit sont nuls.

Supposons en premier lieu ν pair et posons $\nu=2\eta$. Si l'on a $r_1>\eta$, le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdot\cdot & 1 & \cdot\cdot & 1 \\ \cos(\eta+1)\alpha & \cdot\cdot & \cos(\eta+j+1)\alpha & \cdot\cdot & \cos 2\eta\alpha \\ \cos 2(\eta+1)\alpha & \cdot\cdot & \cos 2(\eta+j+1)\alpha & \cdot\cdot & \cos 4\eta\alpha \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \cos(\eta-1)(\eta+1)\alpha & \cdot\cdot & \cos(\eta-1)(\eta+j+1)\alpha & \cdot\cdot & \cos 2\eta(\eta-1)\alpha \end{vmatrix}$$

doit être identiquement nul. Remplaçons $\cos 2(\eta+j+1)\alpha, \ldots, \cos(\eta-1)(\eta+j+1)\alpha$ en fonction de $\cos(\eta+1)\alpha$ au moyen de la formule de Moivre ($j=0, 1, \ldots, \eta-1$). Par soustractions de lignes, le déterminant se ramène à

$$2^{\frac{1}{2}(\eta-2)(\eta-1)}.\begin{vmatrix} 1 & \cdot\cdot & 1 & \cdot\cdot & 1 \\ \cos(\eta+1)\alpha & \cdot\cdot & \cos(\eta+j+1)\alpha & \cdot\cdot & \cos 2\eta\alpha \\ \cos^2(\eta+1)\alpha & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cos^2 2\eta\alpha \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \cos^{\eta-1}(\eta+1)\alpha & \cdot\cdot & \cos^{\eta-1}(\eta+j+1)\alpha & \cdot\cdot & \cos^{\eta-1}(\eta+1)\alpha \end{vmatrix}.$$

Le second facteur est le déterminant de Vandermonde et est différent de zéro. Il en résulte que l'on a $r_1 \leqslant \eta$ et, pour la même raison, $r_2 \leqslant \eta$. On a donc, pour fixer les idées, $r_1=\eta$, $r_2=\eta-1$.

Supposons maintenant ν impair et posons $\nu=2\eta+1$. Si $r_1>\eta$, le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdot\cdot & 1 \\ \cos(\eta+1)\alpha & \cos(\eta+2)\alpha & \cdot\cdot & \cos(2\eta+1)\alpha \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \cos\eta(\eta+1)\alpha & \cos\eta(\eta+2)\alpha & \cdot\cdot & \cos\eta(2\eta+1)\alpha \end{vmatrix}$$

doit être identiquement nul. On démontre comme plus haut qu'il n'en est rien. On a donc $r_1 \leqslant \eta$, $r_2 \leqslant \eta$, d'où $r_1=r_2=\eta$.

En résumé, les axes ponctuels de l'homographie H appartenant à l'espace σ_ν sont :

un espace à η dimensions et un espace à $\eta-1$ dimensions si $\nu=2\eta$;

deux espaces à η dimensions si $\nu=2\eta+1$.

3. Dans l'espace $\sigma_{\nu-1}$, H détermine une homographie biaxiale harmonique H_2 dont les axes ponctuels sont ceux de H appartenant à cet espace.

Les équations de l'espace $\sigma_{\nu-1}$ sont

$$x_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0, \cdots, y_{\nu+1} = 0$$

et celles de l'homographie H_2 s'écrivent

$$\begin{aligned}
\rho z_2' &= z_2 \sin\alpha + z_3 \sin 2\alpha + \cdots + z_{\nu+1} \sin\nu\alpha, \\
\rho z_3' &= z_2 \sin 2\alpha + z_3 \sin 4\alpha + \cdots + z_{\nu+1} \sin 2\nu\alpha, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\rho z_{\nu+1}' &= z_2 \sin\nu\alpha + z_3 \sin 2\nu\alpha + \cdots + z_{\nu+1} \sin\nu^2\alpha.
\end{aligned}$$

Soient r_1, r_2 les dimensions des axes ponctuels de l'homographie H_2 et ρ_1, ρ_2 les racines correspondantes de l'équation caractéristique de cette homographie. On a

$$r_1 + r_2 = \nu - 2.$$

Pour $\rho = \rho_1$, les déterminants à $\nu - r_1$ lignes et colonnes tirés du déterminant

$$\begin{vmatrix}
\sin\alpha - \rho & \sin 2\alpha & \cdot & \cdot & \cdot & \sin\nu\alpha \\
\sin 2\alpha & \sin 4\alpha - \rho & \cdot & \cdot & \cdot & \sin 2\nu\alpha \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\sin\nu\alpha & \sin 2\nu\alpha & \cdot & \cdot & \cdot & \sin\nu^2\alpha - \rho
\end{vmatrix}$$

doivent être nuls.

Supposons en premier lieu $\nu = 2\eta$ et $r_1 > \eta - 1$. Le déterminant

$$\begin{vmatrix}
\sin(\eta+1)\alpha & \sin(\eta+2)\alpha & \cdot & \cdot & \cdot & \sin 2\eta\alpha \\
\sin 2(\eta+1)\alpha & \sin 2(\eta+2)\alpha & \cdot & \cdot & \cdot & \sin 4\eta\alpha \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\sin\eta(\eta+1)\alpha & \sin\eta(\eta+2)\alpha & \cdot & \cdot & \cdot & \sin 2\eta^2\alpha
\end{vmatrix}$$

doit alors être identiquement nul.

En remplaçant dans ce déterminant les éléments des $\eta - 1$ dernières lignes en fonction des éléments de la première au moyen de la formule de Moivre, on ramène le déterminant à

$$2^{\frac{1}{2}\eta(\eta-1)} \cdot \eta!\, \sin(\eta+1)\alpha \cdots \sin 2\eta\alpha \begin{vmatrix}
1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\
\cos(\eta+1)\alpha & \cdot & \cdot & \cdot & \cos 2\eta\alpha \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cos^{\eta-1}(\eta+1)\alpha & \cdot & \cdot & \cdot & \cos^{\eta-1} 2\eta\alpha
\end{vmatrix},$$

quantité qui n'est pas nulle.

On a donc $r_1 \leqslant \eta - 1$ et de même $r_2 \leqslant \eta - 1$. Par suite, $r_1 = r_2 = \eta - 1$.

Si $\nu = 2\eta + 1$ et $r_1 > \eta$, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \sin(\eta+2)\alpha & \sin(\eta+3)\alpha & \cdot & \cdot & \cdot & \sin(2\eta+1)\alpha \\ \sin 2(\eta+2)\alpha & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sin 2(2\eta+1)\alpha \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sin\eta(\eta+2)\alpha & \sin\eta(\eta+3)\alpha & \cdot & \cdot & \cdot & \sin\eta(2\eta+1)\alpha \end{vmatrix}$$

doit être identiquement nul. On démontre, comme dans le cas précédent, que cela est impossible. Par conséquent on a $r_1 \leqslant \eta$, $r_2 \leqslant \eta$; donc, pour fixer les idées, $r_1 = \eta$, $r_2 = \eta - 1$.

Les axes ponctuels de l'homographie H appartenant à l'espace $\sigma_{\nu-1}$ sont :

deux espaces à $\eta - 1$ dimensions si $\nu = 2\eta$;

un espace à η dimensions et un espace à $\eta - 1$ dimensions si $\nu = 2\eta + 1$.

L'homographie H possède donc :

si $\nu = 2\eta$, trois axes ponctuels à $\eta - 1$ dimensions et un axe ponctuel à η dimensions;

si $\nu = 2\eta + 1$, trois axes ponctuels à η dimensions et un axe ponctuel à $\eta - 1$ dimensions.

Liége, le 29 mars 1941.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.
(Domicile légal: rue de la Chancellerie, 4)