EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*.
Séance du 16 janvier 1941. — N° 1.

Sur les points unis des homographies cycliques de l'espace,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Nos recherches sur les involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique (1), nous ont conduit à reprendre, sous un nouvel aspect, l'étude des points unis des homographies cycliques du plan (2). Nous avons plus tard considéré des involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à des variétés algébriques à trois dimensions (3) et ceci nous conduit de même à l'étude des points unis des homographies cycliques de l'espace. Si H est une homographie de période p de l'espace, p étant un nombre premier supérieur à deux et si A est un point uni isolé de cette homographie, celle-ci détermine, dans la gerbe de sommet A, une homographie h qui peut être l'identité, une homologie ou une homographie n'ayant que trois droites unies. Nous avons donc une première répartition des points unis en trois espèces. Il faut ensuite, au moyen de transformations quadratiques appropriées, pour les points unis de seconde et de troisième espèce, étudier les points unis

(1) Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Actualités Scient. et Industr.*, Paris, Hermann, 1935); Sur la structure des points unis appartenant à une surface algébrique (*Mém. Acad. roy. de Belg.*, coll. in-8°, 1938); Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation (*Annales de l'École Norm. Supér.*, 1938, pp. 193-222); Sur les points unis des involutions cycliques d'ordre p^2 appartenant à une surface algébrique (*Bull. Acad. roy. de Belg.*, 1940); Sur les points de diramation des surfaces multiples (*Bull. Soc. roy. des Sc. de Liége*, 1940).

(2) Sur les homographies planes cycliques (*Mém. Soc. roy. des Sc. de Liége*, 1928); Sur les surfaces représentant les involutions planes engendrées par une homographie cyclique (*Idem*, 1930); Sur les courbes tracées sur la surface représentant l'involution engendrée par une homographie plane cyclique (*Idem*, 1931); Remarques sur les homographies cycliques du plan (*Bull. Soc. roy des Sc. de Liége*, 1940); Sur la structure des points unis des homographies cycliques du plan (*Mém. Acad. roy. de Belg.*, en cours d'impression).

(3) Sur deux involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions (*Annales de l'École Norm. Supér.*, 1937); Sur les variétés algébriques à trois dimensions de genres un contenant des involutions cycliques (*Conf. de la Réunion intern. des Math.*, Soc. math. de France, Paris, 1937); Sur les points unis de seconde espèce des involutions cycliques appartenant à une variété algébrique (*Bull. Acad. roy. de Belg.*, 1938).

infiniment voisins du point A. Dans cette courte note préliminaire, nous étudions le cas $p=5$ puis, en ce qui concerne les points unis de seconde espèce, le cas où p est quelconque.

I.

1. Une homographie de période cinq de l'espace est représentée par

$$H = \begin{pmatrix} x_1 & \varepsilon x_2 & \varepsilon^\alpha x_3 & \varepsilon^\beta x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

où ε est une racine primitive cinquième de l'unité et α, β des entiers positifs inférieurs à cinq. Les sommets du tétraèdre de référence sont des points unis de H; nous étudierons la structure du point uni O_1.

Si $\alpha=\beta=1$, H est une homologie de centre O_1 et ce point est un point uni parfait ou point uni de première espèce. Pour que O_1 soit un point uni de seconde espèce, il suffit de poser $\alpha=1$, $\beta=2$, 3 ou 4. Dans la gerbe de sommet O_1, H détermine alors une homologie d'axe $O_1 O_4$ et de plan $O_1 O_2 O_3$. Étudions en premier lieu le cas $\beta=3$.

Le point uni O_1 possède, dans son domaine du premier ordre, un point uni O_{14} situé sur la droite $O_1 O_4$ et une droite unie a_{23} située dans le plan $O_1 O_2 O_3$.

Pour étudier le point O_{14}, effectuons la transformation quadratique Θ_4, où

$$\Theta_4 = \begin{pmatrix} y_1^2 & y_2 y_4 & y_3 y_4 & y_1 y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad \Theta_4^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 x_4 & x_1 x_2 & x_1 x_3 & x_4^2 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

Au point O_{14}, Θ_4 fait correspondre le point $O'_1(1,0,0,0)$. A l'homographie H correspond l'homographie

$$\begin{pmatrix} y_1 & \varepsilon^3 y_2 & \varepsilon^3 y_3 & \varepsilon^3 y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix},$$

pour laquelle O'_1 est un point uni parfait. Donc, le point O_{14} est uni parfait pour H.

Pour étudier la droite unie a_{23}, effectuons la transformation Θ_{23}, où

$$\Theta_{23} = \begin{pmatrix} y_2 y_3 & y_1 y_2 & y_1 y_3 & y_1 y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad \Theta_{23}^{-1} \begin{pmatrix} x_2 x_3 & x_1 x_2 & x_1 x_3 & x_1 x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix},$$

qui fait correspondre à la droite a_{23} la droite $y_1=y_4=0$.

Envisageons le système linéaire dépourvu de points-base, formé des surfaces du cinquième ordre transformées en elles-mêmes par H; il a pour équation

$$\lambda_0 x_1^5 + x_1^2 x_4^2 \varphi_2(x_2, x_3) + x_1 x_4^3 \varphi_1(x_2, x_3) + \lambda_1 x_4^5 + \varphi_5(x_2, x_3) = 0,$$

où φ_2, φ_1 sont des formes algébriques en x_2, x_3 dont le degré est indiqué par l'indice et où les coefficients sont variables. Considérons celles de ces surfaces qui passent par O_1 ($\lambda_0 = 0$) et appliquons-leur la transformation Θ_{23}. Nous obtenons

$$y_2^2 y_3^2 y_4 \varphi_2(y_2, y_3) + y_1 y_2 y_3 y_4^3 \varphi_1(y_2, y_3) + \lambda_1 y_1^2 y_4^5 + y_1^2 \varphi_5(y_2, y_3) = 0.$$

Ces surfaces passent par la droite $y_1 = y_4 = 0$ en y touchant le plan $y_4 = 0$. Par conséquent, la droite a_{23} est unie pour H et il lui est infiniment voisine une droite unie pour H. Nous trouvons donc une première catégorie de point uni de seconde espèce. A ce point uni sont infiniment voisins, d'une part, un point uni parfait et, d'autre part, deux droites unies successives.

Ce résultat est conforme à celui que l'on obtient en considérant le point uni O_1 dans l'homographie engendrée par H dans un plan passant par la droite $O_1 O_4$ (plan uni pour H).

2. Supposons maintenant $\beta = 2$. Le point O_{14}, infiniment voisin de O_1 sur la droite $O_1 O_4$ et la droite a_{23}, infiniment voisine de O_1 dans le plan $O_1 O_2 O_3$, sont encore unis pour H.

Effectuons la transformation Θ_4, qui fait correspondre au point O_{14} le point $O'_1(1, 0, 0, 0)$. A l'homographie H correspond l'homographie [4]

$$(y_1 \quad \eta y_2 \quad \eta y_3 \quad \eta^3 y_4),$$

où l'on a posé $\eta = \varepsilon^4$. Le point O'_1 est donc un point uni de seconde espèce, de la première catégorie rencontrée plus haut.

Considérons maintenant le système linéaire dépourvu de points-base, formé par les surfaces du cinquième ordre transformées en elles-mêmes par H. Il a pour équation

$$\lambda_0 x_1^5 + x_1^2 x_4^2 \varphi_1(x_2, x_3) + x_1 x_4 \varphi_3(x_2, x_3) + \lambda_1 x_4^5 + \varphi_5(x_2, x_3) = 0.$$

---

[4] Pour plus de simplicité, nous écrivons $(y_1 \ \eta y_2 \ \eta y_3 \ \eta^3 y_4)$ au lieu de

$$\begin{pmatrix} y_1 & \eta y_2 & \eta y_3 & \eta^3 y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

Appliquons la transformation Θ_{23} à celles de ces surfaces qui passent par O_1. On obtient le système

$$y_2^2 y_3^2 y_1^2 \varphi_1(y_2, y_3) + y_1 y_2 y_3 y_4 \varphi_3(y_2, y_3) + \lambda_1 y_1^2 y_4^5 + y_1^2 \varphi_5(y_2, y_3) = 0.$$

Ces surfaces passent doublement par la droite $y_1 = y_4 = 0$, qui correspond à a_{23} et, en un point quelconque de cette droite, les plans tangents sont variables avec la surface.

Nous obtenons donc une seconde catégorie de points unis de seconde espèce. A un tel point sont infiniment voisins, d'une part, un point uni de seconde espèce de la première catégorie, d'autre part, une droite unie.

3. Envisageons enfin le cas de $\beta = 4$. Pour étudier le point O_{14}, infiniment voisin de O_1, effectuons encore la transformation Θ_4. A l'homographie H correspond l'homographie

$$(y_1 \quad \eta y_2 \quad \eta y_3 \quad \eta^2 y_4),$$

où l'on a posé $\eta = \varepsilon^2$. Le point uni O_{14} est donc un point uni de seconde espèce et de la seconde catégorie.

Le système linéaire des surfaces du cinquième ordre transformées en elles-mêmes par H et dépourvu de points-base a pour équation

$$\lambda_0 x_4^5 + x_1^3 x_4 \varphi_1(x_2, x_3) + x_1 x_4^2 \varphi_2(x_2, x_3) + \lambda_1 x_4^5 + \varphi_5(x_2, x_3) = 0.$$

Appliquons la transformation Θ_{23} à celles de ces surfaces qui passent par O_1; nous obtenons

$$y_2^3 y_3^3 y_1 \varphi_1(y_2, y_3) + y_1^2 y_2 y_3 y_4^2 \varphi_2(y_2, y_3) + \lambda_1 y_1^3 y_4^5 + y_1^3 \varphi_5(y_2, y_3) = 0.$$

Ces surfaces passent simplement par la droite $y_1 = y_4 = 0$, qui correspond à la droite a_{23}, mais rencontrent le plan $y_4 = 0$ suivant trois droites confondues avec $y_1 = y_4 = 0$. Par conséquent, au point O_1 sont infiniment voisines successives trois droites a_{23}, a'_{23}, a''_{23}. Nous trouvons ainsi une troisième catégorie de points unis de seconde espèce.

4. En résumé, *les points unis de seconde espèce des homographies de période cinq se répartissent en trois catégories :*

A un point uni de la première catégorie sont infiniment voisins, d'une part, un point uni parfait et, d'autre part, une droite unie à laquelle est infiniment voisine une seconde droite unie;

A un point uni de la seconde catégorie sont infiniment voisins,

d'une part, un point uni de la première catégorie et, d'autre part, une droite unie;

A un point uni de la troisième catégorie sont infiniment voisins, d'une part, un point uni de la seconde catégorie et, d'autre part, une droite unie à laquelle sont infiniment voisines successives deux droites unies.

II.

5. Nous allons maintenant passer à l'examen du cas où O_1 est un point uni de troisième espèce. En changeant éventuellement de notation, on peut toujours supposer que l'on a

$$H = (x_1 \quad \varepsilon x_2 \quad \varepsilon^2 x_3 \quad \varepsilon^3 x_4).$$

Au point uni O_1 sont infiniment voisins trois points unis O_{12} sur $O_1 O_2$, O_{13} sur $O_1 O_3$ et O_{14} sur $O_1 O_4$. Pour étudier O_{12}, effectuons la transformation Θ_2, où

$$\Theta_2 = \begin{pmatrix} y_1^2 & y_1 y_2 & y_2 y_3 & y_2 y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad \Theta_2^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 & x_2^2 & x_1 x_3 & x_1 x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix},$$

qui fait correspondre à O_{12} le point $O'_1(1, 0, 0, 0)$. A l'homographie H correspond l'homographie

$$(y_1 \quad \varepsilon y_2 \quad \varepsilon y_3 \quad \varepsilon^2 y_4).$$

Le point O'_1 est donc un point uni de seconde espèce et de seconde catégorie. Il en est par suite de même de O_{12}.

Pour étudier O_{13}, effectuons la transformation Θ_3, où

$$\Theta_3 = \begin{pmatrix} y_1^2 & y_2 y_3 & y_1 y_3 & y_3 y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad \Theta_3^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 x_3 & x_1 x_2 & x_3^2 & x_1 x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix};$$

à O_{13} correspond le point $O'_1(1, 0, 0, 0)$. A l'homographie H correspond l'homographie

$$H' = (y_1 \quad \eta y_2 \quad \eta^3 y_3 \quad \eta^4 y_4),$$

où l'on a posé $\eta = \varepsilon^4$. Le point O'_1 et par conséquent le point O_{13} sont donc des points unis de troisième espèce.

Passons au point O_{14}. La transformation Θ_4 fait correspondre à H l'homographie

$$(y_1 \quad \eta y_2 \quad \eta^3 y_3 \quad \eta y_4),$$

où l'on a posé $\eta = \varepsilon^3$. Le point O_{14} est donc un point uni de seconde espèce et de la première catégorie.

A un point uni de troisième espèce de l'homographie de

période cinq sont infiniment voisins, dans trois directions différentes non coplanaires, trois points unis: deux, de seconde espèce, sont l'un de la première catégorie, l'autre de la seconde; le troisième point uni est de troisième espèce.

6. Au point uni O_{13} sont infiniment voisins trois points unis dont l'un est de troisième espèce. Si nous effectuons à nouveau successivement les transformations Θ_2, Θ_3, Θ_4, à l'homographie H′ correspondent les homographies

$$H'' = (y_1 \quad \eta y_2 \quad \eta^2 y_3 \quad \eta^3 y_4),$$
$$(y_1 \quad \zeta y_2 \quad \zeta y_3 \quad \zeta^2 y_4),$$

où $\zeta = \eta^3$,

$$(y_1 \quad \zeta^3 y_2 \quad \zeta y_3 \quad \zeta y_4),$$

où $\zeta = \eta^4$.

Au point O_{13} sont donc infiniment voisins trois points que nous désignerons par O_{132}, O_{133}, O_{134}; le premier est uni de troisième espèce et les deux derniers de seconde espèce.

L'analogie des équations de H et de H″ montre qu'au point O_{132} est infiniment voisin un point uni de troisième espèce que l'on pourra désigner par O_{1323}, et ainsi de suite.

III.

7. Revenons aux points unis de seconde espèce, mais dans le cas d'une homographie H de période p, où p est un nombre premier. On peut écrire

$$H = (x_1 \quad \varepsilon x_2 \quad \varepsilon x_3 \quad \varepsilon^\alpha x_4),$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité et α un entier compris entre 1 et p.

Le point O_1 est uni de seconde espèce et possède un point infiniment voisin O_{14}, sur la droite $O_1 O_4$, uni de seconde espèce également. Si nous effectuons Θ_4, au point O_{14} correspond le point $O'_1(1, 0, 0, 0)$ et à H l'homographie

$$H_1 = (y_1 \quad \varepsilon^{p-\alpha+1} y_2 \quad \varepsilon^{p-\alpha+1} y_3 \quad \varepsilon^\alpha y_4).$$

Si le point O'_1 est uni parfait pour l'homographie H_1, nous dirons que O_1 est un point uni de la première catégorie. S'il en est autrement, nous recommencerons l'opération précédente.

Nous pouvons opérer directement λ fois l'opération Θ_4. On a

$$\Theta_4^{\lambda} = \begin{pmatrix} y_1^{\lambda+1} & y_2 y_4^{\lambda} & y_3 y_4^{\lambda} & y_1^{\lambda} y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

et

$$\Theta_4^{-\lambda} = \begin{pmatrix} x_1 x_4^{\lambda} & x_1^{\lambda} x_2 & x_1^{\lambda} x_3 & x_4^{\lambda+1} \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

A l'homographie H correspond l'homographie

$$H_{\lambda} = (y_1 \quad \varepsilon^{p-\lambda\alpha+1} y_2 \quad \varepsilon^{p-\lambda\alpha+1} y_3 \quad \varepsilon^{\alpha} y_4).$$

Si le point $O'_1(1, 0, 0, 0)$ est uni parfait pour H_{λ} et si λ est le plus petit entier positif donnant ce résultat, au point O_1 font suite $\lambda - 1$ points unis de seconde espèce, infiniment voisins successifs, suivis d'un point uni parfait. Nous dirons que O_1 est un point uni de seconde espèce de la catégorie λ. Nous devrons donc avoir

$$p - \lambda\alpha + 1 \equiv \alpha, \qquad (\text{mod. } p).$$

Pour déterminer λ lorsque α est donné, posons

$$p = a_1\alpha + \beta_1, 2p = a_2\alpha + \beta_2, \cdots, ip = a_i\alpha + \beta_i,$$
$$\cdots, (\alpha - 1)p = a_{\alpha-1}\alpha + \beta_{\alpha-1},$$

les β étant inférieurs à α. Observons que, p étant premier, deux des nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\alpha-1}$ ne peuvent être égaux. L'un d'eux, par exemple β_i, sera donc égal à $\alpha - 1$. On aura alors $\lambda = a_i$.

8. Au point O_1 est infiniment voisine, dans le plan $O_1 O_2 O_3$, une droite a_{23} suivie éventuellement d'un certain nombre de droites unies pour l'homographie H. La détermination du nombre de ces droites, dans le cas général, est assez compliquée; nous nous bornerons à envisager ici les cas où O_1 est un point uni de la première ou de la seconde catégorie.

Si O_1 est un point uni de la première catégorie, on a $\lambda = 1$ et, si l'on pose $p = 2\nu + 1$, on a en outre $\alpha = \nu + 1$. L'équation de la surface la plus générale d'ordre p, transformée en elle-même par H et ne passant pas par O_1, s'écrit

$$\lambda_0 x_1^p + x_1^{\nu} x_4 \varphi_{\nu}(x_2, x_3) + x_1^{\nu-1} x_4^3 \varphi_{\nu-1}(x_2, y_3) + \cdots + x_1^{\nu-i} x_4^{2i+1} \varphi_{\nu-i}(x_2, x_3)$$
$$+ \cdots + \lambda_1 x_4^p + \varphi_p(x_2, x_3) = 0.$$

Opérons la transformation Θ_{23} sur celles de ces surfaces passant par O_1 ($\lambda_0 = 0$). On a

$$y_2^{\nu} y_3^{\nu} y_4 \varphi_{\nu}(y_2, y_3) + \cdots + y_2^{\nu-i} y_3^{\nu-i} y_1^i y_4^{2i+1} \varphi_{\nu-i}(y_2, y_3) + \ldots + \lambda_1 y_1^{\nu} y_4^p$$
$$+ y_1^{\nu} \varphi_p(y_2, y_3) = 0.$$

Cette surface passe par la droite $y_1 = y_4 = 0$, qui correspond à a_{23} et a un contact d'ordre $\nu - 1$ le long de cette droite avec le plan $y_4 = 0$. On voit donc qu'au point O_1 font suite ν droites infiniment voisines successives, unies pour H, la première étant la droite a_{23}.

9. Supposons maintenant que O_1 appartienne à la seconde catégorie. On a $\lambda = 2$ et deux cas peuvent se présenter, suivant que $p = 3\nu + 1$ ou $p = 3\nu + 2$.

Si $p = 3\nu + 1$, on a $\alpha = 2\nu + 1$ et si $p = 3\nu + 2$, $\alpha = \nu + 1$.

Envisageons le premier cas. La surface d'ordre p la plus générale transformée en elle-même par H et ne passant pas par O_1 a pour équation

$$\lambda_0 x_1^p + x_1^{2\nu} x_4 \varphi_\nu(x_2, x_3) + \cdots + x_1^{2\nu-2i} x_4^{3i+1} \varphi_{\nu-i}(x_2, x_3) + \cdots + x_4^p \varphi_0$$
$$+ x_1^{\nu-1} x_4^2 \varphi_{2\nu} + \cdots + x_1^{\nu-2i-1} x_4^{3i+2} \varphi_{2\nu-i}(x_2, x_3) + \cdots + \varphi_p(x_2, x_3) = 0.$$

Opérons Θ_{23} sur celle de ces surfaces qui ne passe pas par O_1 ($\lambda_0 = 0$). On a

$$y_2^{2\nu} y_3^{2\nu} y_4 \varphi_\nu(y_9, y_3) + \cdots + y_2^{\nu-2i-1} y_3^{\nu-2i-1} y_1^{2i} y_4^{3i+1} \varphi_{\nu-i}(y_2, y_3) + \cdots$$
$$+ y_1^{2\nu} y_4^p \varphi_0 + y_2^{\nu-1} y_3^{\nu-1} y_1^{\nu+1} y_4^2 \varphi_{2\nu}(y_2, y_3) + \cdots$$
$$+ y_2^{\nu-2i-1} y_3^{\nu-2i-1} y_1^{\nu+2i+1} y_4^{3i+2} \varphi_{2\nu-i}(y_2, y_3) + \cdots + y_1^{2\nu} \varphi_p(y_2, y_3) = 0.$$

Cette surface passe simplement par la droite $y_1 = y_4 = 0$ et a, le long de cette droite, un contact d'ordre $2\nu - 1$ avec le plan $y_1 = 0$. Par conséquent, au point O_1 sont infiniment voisines successives 2ν droites dont la première est a_{23}.

Passons au second cas. La surface d'ordre p analogue à celles qui ont été considérées plus haut a pour équation

$$\lambda_0 x_1^p + x_1^{2\nu} x_4^2 \varphi_\nu(x_2, x_3) + \cdots + x_1^{2\nu-2i} x_4^{3i+2} \varphi_{\nu-i}(x_2, x_3) + \cdots + x_4^p \varphi_0$$
$$+ x_1^\nu x_4 \varphi_{2\nu+1}(x_2, x_3) + \cdots + x_1^{\nu-2i} x_4^{3i+1} \varphi_{2\nu+1-i}(x_2, x_3) + \cdots$$
$$+ \varphi_p(x_2, x_3) = 0.$$

Opérons Θ_{23} sur la surface obtenue en posant $\lambda_0 = 0$. Il vient

$$y_2^{2\nu} y_3^{2\nu} y_4^2 \varphi_\nu(y_2, y_3) + \cdots + y^{2\nu-2i} y_3^{2\nu-2i} y_1^{2i} y_4^{3i+2} \varphi_{\nu-i}(y_2, y_3) + \cdots$$
$$+ y_1^{2\nu} y_4^p \varphi_0 + y_2^\nu y_3^\nu y_1^\nu y_4 \varphi_{2\nu+1}(y_2, x_3) + \cdots$$
$$+ y_2^{\nu-2i} y_3^{\nu-2i} y_1^{\nu-2i} y_4^{3i+1}(y_2, y_3) + \cdots + y_1^{2\nu} \varphi_p(y_2, y_3) = 0.$$

Cette surface passe doublement par la droite $y_1 = y_4 = 0$ et possède encore, dans le plan $y_4 = 0$, $\nu - 1$ droites doubles infiniment voisines de la précédente.

Au point O_1 sont infiniment voisines successives ν droites dont la première est a_{23}.

Liége, le 24 décembre 1940.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles.
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)