EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*,
Séance du 16 janvier 1941. — N° 1.

Sur un groupe d'homographies planes,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Le groupe que nous nous proposons d'étudier dans ce travail est engendré de la manière suivante : nous considérons deux homographies cycliques de période trois, Ω_1, Ω_2, non homologiques, permutables. Les homographies $\Omega_3 = \Omega_1 \Omega_2$, $\Omega_4 = \Omega^2{}_1 \Omega_2$ sont également de période trois, non homologiques, permutables entre elles et avec chacune des homographies Ω_1, Ω_2. Nous considérons ensuite les homographies qui font correspondre aux points unis de l'une des homographies Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4, les points unis d'une autre de ces homographies et, à un point uni d'une troisième, un point uni à la dernière. Ces homographies ont la période quatre et nous montrons que l'ensemble de toutes ces homographies constitue un groupe d'ordre soixante-douze.

Les trois points unis de chacune des homographies Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 forment un groupe de douze points se répartissant quatre par quatre sur neuf droites. Corrélativement, les douze droites unies de ces homographies passent quatre par quatre par neuf points du plan, qui forment la base d'un faisceau sizigétique de cubiques planes.

Les involutions du troisième ordre, engendrées par les homographies Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4, ont pour images des surfaces cubiques possédant trois points doubles biplanaires. Aux homographies de période quatre considérées correspondent des homographies transformant ces surfaces les unes dans les autres.

Les considérations précédentes peuvent s'étendre aux hyperespaces, comme nous le montrerons prochainement.

1. Soient, dans un plan ϖ, Ω_1 et Ω_2 deux homographies cycliques de période trois, non homologiques, permutables. Nous pouvons prendre, ε étant une racine cubique primitive de l'unité,

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} x_1 & \varepsilon x_2 & \varepsilon^2 x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \qquad \Omega_2 = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Ces homographies engendrent, dans le plan ϖ, une involution I_9, d'ordre neuf, dont un groupe est formé par les points

$$(x_1, x_2, x_3), \quad (x_1, \varepsilon x_2, \varepsilon^2 x_3), \quad (x_1, \varepsilon^2 x_2, \varepsilon x_3),$$
$$(x_2, x_3, x_1), \quad (x_2, \varepsilon x_3, \varepsilon^2 x_1), \quad (x_2, \varepsilon^2 x_3, \varepsilon x_1),$$
$$(x_3, x_1, x_2), \quad (x_3, \varepsilon x_1, \varepsilon^2 x_2), \quad (x_3, \varepsilon^2 x_1, \varepsilon x_2).$$

Les homographies

$$\Omega_3 = \Omega_1 \Omega_2 = \Omega_2 \Omega_1, \qquad \Omega_4 = \Omega_1^2 \Omega_2 = \Omega_2 \Omega_1^2$$

sont également de période trois et non homologiques. On a

$$\Omega_3^2 = \Omega_1^2 \Omega_2^2 = \Omega_2^2 \Omega_1^2, \qquad \Omega_4^2 = \Omega_1 \Omega_2^2 = \Omega_2^2 \Omega_1.$$

Les quatre homographies Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 engendrent des involution d'ordre trois, respectivement $I_3^{(1)}$, $I_3^{(2)}$, $I_3^{(3)}$, $I_3^{(4)}$ avec lesquelles l'involution I_9 est composée.

Chacune de ces quatre homographies possède trois points unis que nous désignerons par

$$A_{11}(1, 0, 0), \qquad A_{12}(0, 1, 0), \qquad A_{13}(0, 0, 1),$$

pour Ω_1, par

$$A_{21}(1, 1, 1), \qquad A_{22}(1, \varepsilon, \varepsilon^2), \qquad A_{23}(1, \varepsilon^2, \varepsilon)$$

pour Ω_2, par

$$A_{31}(\varepsilon^2, 1, 1), \qquad A_{32}(1, \varepsilon^2, 1), \qquad A_{33}(1, 1, \varepsilon^2)$$

pour Ω_3, enfin, par

$$A_{41}(\varepsilon, 1, 1), \qquad A_{42}(1, \varepsilon, 1), \qquad A_{43}(1, 1, \varepsilon)$$

pour Ω_4.

A chacun de ces points unis est associée une droite unie. Les droites unies a_{11}, a_{12}, a_{13} de Ω_1 ont respectivement pour équations

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0.$$

Les droites unies a_{21}, a_{22}, a_{23} de Ω_2 ont respectivement pour équations

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \qquad x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3 = 0, \qquad x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 = 0.$$

Les droites unies a_{31}, a_{32}, a_{33} de Ω_3 ont respectivement pour équations

$$\varepsilon x_1 + x_2 + x_3 = 0, \qquad x_1 + \varepsilon x_2 + x_3 = 0, \qquad x_1 + x_2 + \varepsilon x_3 = 0.$$

Enfin, les droites unies a_{41}, a_{42}, a_{43} de Ω_4 ont respectivement pour équations

$$\varepsilon^2 x_1 + x_2 + x_3 = 0, \qquad x_1 + \varepsilon^2 x_2 + x_3 = 0, \qquad x_1 + x_2 + \varepsilon^2 x_3 = 0.$$

2. Les points unis de l'une des homographies Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 sont échangés entre eux par les trois autres. On a précisément

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{22} & A_{23} & A_{21} & A_{32} & A_{33} & A_{31} & A_{43} & A_{41} & A_{42} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{41} & A_{42} & A_{43} \end{pmatrix},$$

$$\Omega_2 = \begin{pmatrix} A_{12} & A_{13} & A_{11} & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{33} & A_{31} & A_{32} & A_{43} & A_{41} & A_{42} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{41} & A_{42} & A_{43} \end{pmatrix},$$

$$\Omega_3 = \begin{pmatrix} A_{12} & A_{13} & A_{11} & A_{22} & A_{23} & A_{21} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{42} & A_{43} & A_{41} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{41} & A_{42} & A_{43} \end{pmatrix},$$

$$\Omega_4 = \begin{pmatrix} A_{12} & A_{13} & A_{11} & A_{22} & A_{23} & A_{21} & A_{32} & A_{33} & A_{31} & A_{41} & A_{42} & A_{43} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{41} & A_{42} & A_{43} \end{pmatrix}.$$

Les quatre homographies en question produisent les mêmes permutations sur les droites unies.

3. On vérifie aisément que par un point commun à deux droites unies de deux des quatre homographies Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 passent deux droites unies appartenant une à chacune des deux autres homographies. Ainsi, les quatre droites a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41} passent par le point $(0, 1, -1)$. Les points d'intersection des droites unies d'homographies différentes sont donc au nombre de neuf et se distribuent trois par trois sur ces douze droites. Il en résulte, d'après un théorème classique de Cremona, que ces neuf points forment la base d'un faisceau sizigétique de cubiques.

D'ailleurs, les quatre cubiques du faisceau constituées par les droites unies de chacune des homographies Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 ont respectivement pour équations

$$x_1 x_2 x_3 = 0, \qquad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\, x_1 x_2 x_3 = 0,$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\,\varepsilon x_1 x_2 x_3 = 0, \qquad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\,\varepsilon^2 x_1 x_2 x_3 = 0$$

et le faisceau a pour équation

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \lambda x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Corrélativement, les points unis des quatre homographies se distribuent quatre par quatre sur neuf droites. Ainsi, les points A_{11}, A_{21}, A_{31}, A_{41} se trouvent sur la droite $x_2 = x_3$.

4. Construisons une homographie qui fait correspondre aux points unis de Ω_1, ceux de Ω_2 pris dans un certain ordre et à un point uni de Ω_3, un point uni de Ω_4. Pour fixer les idées, supposons qu'aux points A_{11}, A_{12}, A_{13} doivent respectivement correspondre A_{21}, A_{22}, A_{23}. Une homographie satisfaisant à cette première condition a pour équations

$$\begin{aligned} \rho x'_1 &= \rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \rho_3 x_3, \\ \rho x'_2 &= \rho_1 x_1 + \rho_2 \varepsilon x_2 + \rho_3 \varepsilon^2 x_3, \\ \rho x'_3 &= \rho_1 x_1 + \rho_2 \varepsilon^2 x_2 + \rho_3 \varepsilon x_3. \end{aligned}$$

Au point uni A_{31}, cette homographie fait correspondre le point

$$\rho_1 \varepsilon^2 + \rho_2 + \rho_3, \qquad (\rho_1 + \rho_3)\varepsilon^2 + \rho_2 \varepsilon, \qquad (\rho_1 + \rho_2)\varepsilon^2 + \rho_3 \varepsilon.$$

Pour que ce point coïncide avec A_{41}, on doit avoir $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$; pour qu'il coïncide avec A_{42}, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = \varepsilon^2$, $\rho_3 = \varepsilon$; enfin, pour qu'il coïncide avec A_{43}, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = \varepsilon$, $\rho_3 = \varepsilon^2$.

Nous obtenons ainsi trois homographies H, H′, H″, que nous représenterons par la matrice de leurs coefficients, en écrivant

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}, \qquad H' = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix}, \qquad H'' = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarquons d'ailleurs que l'on a

$$H' = \begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{42} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{41} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{31} \end{pmatrix} \Omega_2^2 = H\,\Omega_2^2$$

et de même

$$H'' = H\,\Omega_2.$$

Il suffira donc de considérer H. Nous avons

$$H^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$H^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{13} & A_{12} & A_{41} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{31} \end{pmatrix},$$

et

$$H^3 = \begin{pmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{22} & A_{41} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{31} \end{pmatrix}.$$

L'homographie H^2 est une homologie harmonique de centre $x_1 = x_2 + x_3 = 0$ et d'axe $x_2 - x_3 = 0$.

Par conséquent, l'homographie H a la période quatre.

Remarquons maintenant que l'on a

$$\begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{21} & A_{42} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{31} \end{pmatrix} = H\Omega_1, \qquad \begin{pmatrix} A_{23} & A_{21} & A_{22} & A_{43} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{31} \end{pmatrix} = H\Omega_1^2.$$

On en conclut que *les homographies faisant correspondre aux points unis de* Ω_1, *ceux de* Ω_2 (*pris dans un ordre quelconque*) *et à un point uni de* Ω_3, *un point uni de* Ω_4, *s'obtiendront toutes en considérant l'une d'entre elles, son cube et les produits de ces homographies par* Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 *et par leurs carrés.*

Par conséquent, *toute homographie faisant correspondre aux points unis de* Ω_1, *ceux de* Ω_2 *et à un point uni de* Ω_3, *un point uni de* Ω_4, *a la période quatre; son carré est une homologie harmonique.*

On voit d'ailleurs que cette homographie fait correspondre aux points unis de Ω_3, ceux de Ω_4 et que son carré laisse fixe un point uni de chacune des homographies Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4, ces quatre points unis appartenant à l'axe d'homologie.

De plus, H et H^3 font correspondre aux points unis de Ω_2, Ω_4, respectivement ceux de Ω_1, Ω_3.

5. Les homographies Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 jouent des rôles symétriques et l'on a, par exemple,

$$\Omega_1\Omega_3 = \Omega_3\Omega_1 = \Omega_4, \qquad \Omega_1^2\Omega_3 = \Omega_3\Omega_1^2 = \Omega_2.$$

Nous sommes donc conduit à considérer l'homographie

$$H_1 = \begin{pmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{41} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{21} \end{pmatrix}$$

et les homographies faisant correspondre aux points unis de Ω_1, ceux de Ω_3 et, à un point uni de Ω_2, un point uni de Ω_4, homographies qui se déduisent de H_1 en la multipliant par Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 et par les carrés de ces dernières.

Un calcul simple montre que l'on a

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad H_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_1^3 = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

On a donc $H^2_1 = H^2$ et H_1 est, comme H, une homographie de période quatre.

Considérons de même l'homographie

$$H_2 = \begin{pmatrix} A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{31} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{21} \end{pmatrix}.$$

On a

$$H^2 = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon^2 \end{pmatrix}, \quad H_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

On a d'ailleurs, comme on le vérifie aisément,

$$H_2 = H_1 H, \qquad H_2^3 = H H_1.$$

6. Les homographies Ω_1, Ω_2, H et H_1 engendrent un groupe d'ordre fini. Pour déterminer cet ordre, considérons le système linéaire des courbes du sixième ordre

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1(x_1^6 + x_2^6 + x_3^6) + \lambda_2(x_2^3 x_3^3 + x_3^3 x_1^3 + x_1^3 x_2^3) \\ &+ \lambda_3 x_1 x_2 x_3 (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + \lambda_4 x_1^2 x_2^2 x_3^2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Les courbes de ce système sont transformées en elles-mêmes par Ω_1, Ω_2 et par $H^2 = H^2{}_1$; c'est d'ailleurs le système le plus ample de courbes de sixième ordre, dépourvu de points-base, jouissant de cette propriété. D'autre part, le système (1) est transformé en lui-même par les homographies H et H_1.

Rapportons projectivement les courbes (1) aux plans d'un espace en prenant, comme plans homologues de ces courbes, les plans

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 = 0.$$

Aux homographies H, H_1 correspondent, dans cet espace, respectivement les homographies

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 3 & 60 & 90 & 270 \\ 3 & -21 & 9 & 27 \\ 3 & 6 & 9 & -54 \\ 1 & 2 & -6 & 9 \end{pmatrix}, \quad \overline{H}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 60 & 90\varepsilon^2 & 270\varepsilon \\ 3 & -21 & 9\varepsilon^2 & 27\varepsilon \\ 3\varepsilon & 6\varepsilon & 9 & -54\varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 2\varepsilon^2 & -6\varepsilon & 9 \end{pmatrix}.$$

Ces homographies sont involutives et l'on vérifie aisément qu'il en est bien ainsi.

De plus, les homographies $\overline{\mathrm{H}}$, $\overline{\mathrm{H}}_1$ sont permutables et l'homographie

$$\overline{\mathrm{H}}\,\overline{\mathrm{H}}_1 = \overline{\mathrm{H}}_1\overline{\mathrm{H}} = \begin{pmatrix} 3 & 60 & 90\varepsilon & 270\varepsilon^2 \\ 3 & -21 & 9\varepsilon & 27\varepsilon^2 \\ 3\varepsilon^2 & 6\varepsilon^2 & 9 & -54\varepsilon \\ \varepsilon & 2\varepsilon & -6\varepsilon^2 & 9 \end{pmatrix}$$

correspond à l'homographie H_2.

Dans le plan primitif, les homographies Ω_1, Ω_2 et H^2 engendrent une involution d'ordre dix-huit, dont les groupes sont représentés par les points du cône

$$\mathrm{X}_3^2 = \mathrm{X}_4(\mathrm{X}_1 + 2\,\mathrm{X}_2).$$

Sur ce cône, les homographies H et H_1 engendrent une involution d'ordre quatre. Il en résulte que *les homographies* Ω_1, Ω_2, H *et* H_1 *engendrent un groupe fini d'ordre soixante-douze.*

7. Le système linéaire de cubiques planes, dépourvu de points-base, le plus ample possible, appartenant à l'involution $\mathrm{I}_3^{(1)}$ engendrée par Ω_1, a pour équation

$$\lambda_1 x_1^3 + \lambda_2 x_2^3 + \lambda_3 x_3^3 + \lambda_4 x_1 x_2 x_3 = 0. \tag{1}$$

Les systèmes analogues, appartenant aux involutions $\mathrm{I}_3^{(2)}$, $\mathrm{I}_3^{(3)}$, $\mathrm{I}_3^{(4)}$ ont respectivement pour équations

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + \lambda_2(x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1) \\ &+ \lambda_3(x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_3^2x_2) + \lambda_4 x_1x_2x_3 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + \lambda_2(x_1^2x_2 + \varepsilon x_2^2x_3 + \varepsilon^2 x_3^2x_1) \\ &+ \lambda_3(x_1^2x_3 + \varepsilon^2 x_2^2x_1 + \varepsilon x_3^2x_2) + \lambda_4 x_1x_2x_3 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1(x_1^3 + x_1^3 + x_2^3) + \lambda_2(x_1^2x_2 + \varepsilon^2 x_2^2x_3 + \varepsilon x_3^2x_1) \\ &+ \lambda_3(x_1^2x_3 + \varepsilon x_2^2x_1 + \varepsilon^2 x_3^2x_2) + \lambda_4 x_1x_2x_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Rapportons projectivement les courbes du système (1) aux plans d'un espace Σ_1 en faisant correspondre à ces courbes les plans

$$\lambda_1 \mathrm{X}_{11} + \lambda_2 \mathrm{X}_{12} + \lambda_3 \mathrm{X}_{13} + \lambda_4 \mathrm{X}_{14} = 0.$$

Aux groupes de l'involution I_3 correspondent les points de la surface F_1 d'équation [1]

$$X_{11} X_{12} X_{13} = X_{14}^3.$$

F_1 est une surface cubique possédant trois points doubles biplanaires, qui correspondent aux points unis A_{11}, A_{12}, A_{13} de Ω_1.

Aux homographies Ω_2, Ω_3, Ω_4 correspond l'homographie

$$\begin{pmatrix} X_{12} & X_{13} & X_{11} & X_{14} \\ X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \end{pmatrix}$$

et à l'homographie H^2 correspond l'homologie harmonique

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{13} & X_{12} & X_{14} \\ X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \end{pmatrix},$$

qui transforment évidemment F_1 en elle-même.

Rapportons de même projectivement les courbes des systèmes (2), (3) et (4) aux plans d'espaces Σ_2, Σ_3, Σ_4 en faisant correspondre à ces courbes respectivement les plans

$$\lambda_1 X_{21} + \lambda_2 X_{22} + \lambda_3 X_{23} + \lambda_4 X_{24} = 0,$$
$$\lambda_1 X_{31} + \lambda_2 X_{32} + \lambda_3 X_{33} + \lambda_4 X_{34} = 0,$$
$$\lambda_1 X_{41} + \lambda_2 X_{42} + \lambda_3 X_{43} + \lambda_4 X_{44} = 0.$$

Aux involutions $I_3^{(2)}$, $I_3^{(3)}$, $I_3^{(4)}$, correspondent respectivement des surfaces cubiques F_2, F_3, F_4, présentant chacune trois points doubles biplanaires.

8. L'homographie H transforme l'involution $I_3^{(1)}$ en $I_3^{(2)}$ et l'involution $I_3^{(3)}$ en $I_3^{(4)}$; elle fait donc correspondre au système (1) le système (2) et au système (3) le système (4). A cette homographie correspond donc une homographie K entre les espaces Σ_1 et Σ_2, faisant correspondre F_2 à F_1, et une homographie K' entre les systèmes Σ_3 et Σ_4, faisant correspondre F_4 à F_3.

En représentant K par la matrice de ses coefficients et en faisant de même pour K^{-1}, on a

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 3\varepsilon & 3\varepsilon^2 & 6 \\ 1 & 3\varepsilon^2 & 3\varepsilon & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad K^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 18 \\ 3 & 3\varepsilon^2 & 3\varepsilon & 0 \\ 3 & 3\varepsilon & 3\varepsilon^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

---

(1) Étude élémentaire sur l'homographie plane de période trois et sur une surface cubique (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1916, pp. 49-61).

En opérant K sur la surface F_1, on trouve, pour équation de la surface F_2,

$$X_{22}^3 + X_{23}^3 - X_{22}X_{33}(X_{21} + 6X_{24}) + X_{24}(X_{21}^2 + 3X_{21}X_{24} + 9X_{24}^2) = 0.$$

A l'homographie H^3 correspond l'homographie

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 6 \\ 1 & 3\varepsilon^2 & 3\varepsilon & 6 \\ 1 & 3\varepsilon & 3\varepsilon^2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

entre Σ_1 et Σ_2, qui transforme également F_1 en F_2. Cette homographie est d'ailleurs le produit de K par l'homographie qui, dans Σ_2, correspond à H^2.

Aux homographies Ω_1, Ω_3, Ω_4 correspond, dans Σ_2, une même homographie de période trois

$$\begin{pmatrix} X_{21} & \varepsilon X_{22} & \varepsilon^2 X_{23} & X_{24} \\ X_{21} & X_{22} & X_{24} & X_{24} \end{pmatrix}$$

et en faisant le produit de K par cette homographie et par son carré, on obtient d'autres homographies entre F_1 et F_2 (et entre Σ_1 et Σ_2).

Quant à l'homographie K', elle est donnée par

$$K' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 3(\varepsilon^2+2) & 0 \\ 0 & 3(\varepsilon^2+2) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

9. A l'homographie H_1 correspondent de même une homographie K_1 entre les espaces Σ_1 et Σ_3, et une homographie K'_1 entre les espaces Σ_2 et Σ_4. La première transforme F_1 en F_3 et la seconde F_2 en F_4. On a

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3\varepsilon & 3\varepsilon & 6\varepsilon^2 \\ 1 & 3 & 3\varepsilon^2 & 6\varepsilon^2 \\ 1 & 3\varepsilon^2 & 3 & 6\varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 0 & 0 & -3\varepsilon \end{pmatrix}$$

On en déduit l'équation de la surface F_3,

$$X_{32}^3 + X_{33}^3 + 3\varepsilon(\varepsilon X_{31} + 6X_{34})X_{32}X_{33} + 3\varepsilon^2(X_{31} - 3\varepsilon X_{34})(X_{31} + 3X_{34})X_{34} = 0.$$

Enfin, à l'homographie H_2 correspond l'homographie

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3\varepsilon^2 & 3\varepsilon^2 & 6\varepsilon \\ 1 & 3 & 3\varepsilon & 6\varepsilon \\ 1 & 3\varepsilon & 3 & 6\varepsilon \\ \varepsilon & 0 & 0 & -3\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

entre les espaces Σ_1 et Σ_4. L'équation de la surface F_4 est

$$X_{42}^3 + X_{43}^3 + 3\varepsilon^2(\varepsilon^2 X_{41} + 6X_{44})X_{42}X_{43}$$
$$+ 3\varepsilon(X_{41} - 3\varepsilon^2 X_{44})(X_{41} + 3X_{44})X_{44} = 0.$$

Liége, le 14 janvier 1941.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)