Une variété algébrique à trois dimensions sur laquelle l'opération d'adjonction a la période trois,

par Lucien GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Considérons une surface algébrique F régulière, non rationnelle et n'appartenant pas à la classe des réglées. D'un système linéaire $|C|$ de courbes tracées sur F, l'opération d'adjonction permet de déduire successivement des systèmes linéaires $|C'|$, $|C''|$, ... en général distincts. On sait que si l'opération d'adjonction est périodique, elle a précisément la période un (identité) ou deux. Dans le premier cas, tout système linéaire tracé sur la surface F est son propre adjoint et la surface est de genres un ($p_a = P_4 = 1$); dans le second cas, on obtient la surface de bigenre un d'Enriques ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$). Considérons maintenant une variété algébrique V à trois dimensions et soit $|F|$ un système linéaire de surfaces tracées sur cette variété. L'opération d'adjonction peut-elle être périodique, c'est-à-dire lorsque l'on prend les adjoints successifs $|F'|$, $|F''|$, ..., de $|F|$, peut-on, après un certain nombre d'opérations, retrouver $|F|$? La réponse est affirmative. Il est tout d'abord aisé de construire des variétés V sur lesquelles tout système linéaire de surfaces est son propre adjoint, l'opération d'adjonction étant donc l'identité. Nous avons construit récemment une variété V sur laquelle l'opération d'adjonction a la période deux [1]. Nous allons construire dans cette note une variété algébrique sur laquelle l'opération d'adjonction a la période trois.

On sait que M. Enriques a démontré que la surface de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$ représente une involution du second ordre (privée de points unis) appartenant à une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Il est donc tout indiqué, pour résoudre le problème que nous nous sommes posé, de considérer une involution cyclique appartenant à une variété algébrique V, à trois dimensions, sur laquelle tout système linéaire de surfaces est son propre adjoint, et d'étudier la variété image de cette involution. Dans un mémoire en cours d'impression, nous avons étudié les involutions cycliques du troisième ordre, ayant au plus ∞^1 points unis, appartenant à une variété algébrique de la classe indiquée. Cela nous a permis de construire une variété sur laquelle l'opération d'adjonction a la période trois. En appliquant ces résultats à une variété particulière, on montre l'existence effective du cas étudié.

1. Soit, dans un espace linéaire S_8, V^6_4 la variété de Segre représentant les couples de points de deux plans η, ζ. Si y_1, y_2, y_3 sont les coordonnées d'un point de η et z_1, z_2, z_3 celles d'un point de ζ, nous poserons

$$\rho x_{ik} = y_i z_k$$

et les équations de V^6_4 s'obtiendront en exprimant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}$$

est de caractéristique un.

(1) Sur une variété algébrique à trois dimensions de bigenre un. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1937, pp. 93-101.)

sur laquelle l'opération d'adjonction a la période trois.

Nous avons démontré récemment que l'intersection de la variété V^6_4 et d'une hypersurface cubique V^3_7 de S_8 est une variété V^{18}_3 sur laquelle tout système linéaire de surfaces est son propre adjoint [1].

Considérons, dans les plans η, ζ, les projectivités cycliques de période trois

$$y'_1 : y'_2 : y'_3 = y_1 : \varepsilon y_2 : \varepsilon y_3, \qquad z'_1 : z'_2 : z'_3 = z_1 : \varepsilon z_2 : \varepsilon^2 z_3,$$

ε étant une racine cubique primitive de l'unité. Ces projectivités déterminent, dans S_8, l'homographie H, de période trois, d'équations

$$\frac{x'_{11}}{x_{11}} = \frac{x'_{12}}{\varepsilon x_{12}} = \frac{x'_{13}}{\varepsilon^2 x_{13}} = \frac{x'_{21}}{\varepsilon x_{21}} = \frac{x'_{22}}{\varepsilon^2 x_{22}} = \frac{x'_{23}}{x_{23}} = \frac{x'_{31}}{\varepsilon x_{31}} = \frac{x'_{32}}{\varepsilon^2 x_{32}} = \frac{x'_{33}}{x_{33}},$$

transformant V^6_4 en elle-même.

Supposons que l'hypersurface V^3_7 soit également transformée en elle-même par H; nous obtiendrons ainsi une variété V^{18}_3 sur laquelle H détermine une involution cyclique I_3 d'ordre trois, dont nous étudierons la variété image.

2. Désignons par O_{ik} le point de S_8 dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf x_{ik}.

L'homographie H possède comme axes ponctuels les trois plans

$$\alpha_1 = O_{11}O_{33}O_{23}, \qquad \alpha_2 = O_{12}O_{21}O_{31}, \qquad \alpha_3 = O_{22}O_{13}O_{32}.$$

Le plan α_1 coupe la variété V^6_4 suivant la droite $O_{23}\,O_{33}$ et suivant le point O_{11}; le plan α_2, suivant la droite $O_{21}\,O_{31}$ et le point O_{12}; le plan α_3 suivant la droite $O_{22}\,O_{32}$ et le point O_{13}.

Nous prendrons comme hypersurface V^3_7 une hypersurface ne contenant aucun des axes ponctuels de H; son équation sera donc de la forme

$$\varphi_3(x_{11}, x_{33}, x_{23}) + \varphi'_3(x_{12}, x_{21}, x_{31}) + \varphi''_3(x_{22}, x_{13}, x_{32}) + \psi = 0,$$

[1] Sur une surface canonique appartenant à la variété de Segre représentant les couples de points de deux plans. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1936, pp. 1223-1225.)

où φ_3, φ_3', φ_3'' sont des formes cubiques complètes et où ψ est une expression dont chaque terme comprend un des facteurs x_{11}, x_{33}, x_{23}, un des facteurs x_{12}, x_{21}, x_{31} et un des facteurs x_{22}, x_{13}, x_{32}.

La variété V^{18}_3 — que nous désignerons à l'avenir plus simplement par V — intersection de V^6_4 et de V^3_7, contient donc une involution cyclique I_3, d'ordre trois, engendrée par H et possédant neuf points unis, trois sur chacune des droites $O_{23}\,O_{33}$, $O_{21}\,O_{31}$, $O_{22}\,O_{32}$.

Nous désignerons par F les sections hyperplanes de V; ce sont des surfaces régulières de genres $p_a = p_g$, $p^{(1)} = 19$. La variété V est d'irrégularité superficielle nulle, le système $|F|$ ayant des courbes d'intersection variables irréductibles.

Dans le système $|F|$, il y a trois réseaux de surfaces unies pour H : ce sont les réseaux formés par les surfaces F_1, découpées par les hyperplans passant par α_2, α_3; par les surfaces F_2, découpées par les hyperplans passant par α_3, α_1; enfin, par les surfaces F_3, découpées par les hyperplans passant par les plans α_1, α_2.

Soient Ω une variété image de l'involution, I_3; Φ_1, Φ_2, Φ_3 les surfaces qui correspondent sur cette variété respectivement aux surfaces F_1, F_2, F_3. Les trois réseaux $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, $|\Phi_3|$ sont des systèmes complets.

3. Dans ce qui va suivre, nous utiliserons les propriétés suivantes, que nous avons établies dans nos recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (¹).

1° Si une surface algébrique régulière F contient une involution cyclique de période trois dépourvue de points unis, le système canonique de la surface image de l'invo-

(¹) On trouvera un exposé de ces recherches dans notre ouvrage « Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique ». (*Actualités scient. et indust.*, Paris, Hermann, 1935.) Pour les propriétés utilisées ici, voir en particulier les nᵒˢ 17, 20, 29 et 31 de l'index bibliographique.

lution a pour transformé celui des systèmes linéaires formé de courbes canoniques de F, composés au moyen de l'involution, qui a la dimension minimum.

2° Si une surface algébrique F contient une involution cyclique de période trois, ayant un nombre fini de points unis, aux courbes canoniques de la surface image de l'involution correspondent des courbes canoniques de la surface F ne passant pas par les points unis non parfaits mais passant simplement par les points unis parfaits de l'involution.

4. Commençons par examiner les points unis de l'involution I_3. L'espace tangent à V en un de ces points est uni pour l'homographie H. Dans cet espace, celle-ci détermine donc une homographie dont il s'agit de déterminer les axes ponctuels.

Soit R_1 un point de V_3 appartenant à la droite $O_{23}\ O_{33}$. Désignons par x_{23}, x_{33} celles de ses coordonnées qui ne sont pas nulles. L'espace tangent à V_3 en R_1 a pour équations

$$X_{11} = 0, \quad X_{12} = 0, \quad X_{22}x_{33} - X_{32}x_{23} = 0, \quad X_{21}x_{33} - X_{31}x_{23} = 0,$$
$$X_{33}\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_{33}} + X_{23}\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_{23}} = 0.$$

Cet espace ρ_1 coupe le plan α_2 au point R_{12}

$$X_{11} = X_{22} = X_{33} = X_{13} = X_{23} = X_{32} = X_{12} = 0, \quad X_{21}x_{33} - X_{31}x_{23} = 0$$

et le plan α_3 suivant la droite r_{13}

$$X_{11} = X_{33} = X_{23} = X_{12} = X_{21} = X_{31} = 0, \quad X_{22}x_{33} - X_{32}x_{23} = 0.$$

Il ne rencontre le plan α_1 qu'au seul point R_1.

L'homographie déterminée par H dans ρ_1 possède les points unis R_1, R_{12} et la droite unie (axe ponctuel) r_{13}.

Dans la gerbe des tangentes à V en point R_1, H détermine donc une homologie ayant pour axe la droite $R_1\ R_{12}$ et pour plan, le plan $R_1\ r_{13}$.

L'espace ρ_2 tangent à V en un point R_2 de cette variété appartenant à la droite $O_{21}\ O_{31}$ s'appuie en un point R_{23}

sur le plan α_3 et suivant une droite r_{31} sur le plan α_1. Il n'a que le point R_2 en commun avec le plan α_2.

De même, l'espace ρ_3 tangent à V en un point R_3 appartenant à la droite O_{22} O_{32} rencontre le plan α_1 en un point R_{31} et le plan α_2 suivant une droite r_{32}; il n'a que le point R_3 en commun avec le plan α_3.

5. Envisageons une surface F_1. Elle est la section de V par un hyperplan passant par α_2, α_3, et par suite elle ne passe pas en général par les points R_1. Elle passe, par contre, par les points R_2, R_3, qui sont des points simples pour cette surface.

Le plan tangent à la surface F_1 en un point R_2 contient la droite R_2 R_{23} et coupe le plan R_2 r_{21} suivant une droite, variable avec la surface. Il en résulte que les points R_2 sont des points unis non parfaits pour l'involution formée des groupes de I_3 appartenant à F_1.

En un point R_3, la surface F_1 touche le plan R_3 r_{32}, et par conséquent, les points R_3 sont des points unis parfaits pour l'involution déterminée par I_3 sur F_1.

Il en résulte qu'aux courbes canoniques de la surface Φ_1, homologue de F_1, correspondent sur cette surface des courbes canoniques ne passant pas par les points R_2, mais passant simplement par les points R_3.

Sur une surface F_2, l'involution I_3 détermine une involution ayant des points unis parfaits aux points R_1 et des points unis non parfaits aux points R_3. Au système canonique d'une surface Φ_2 correspond donc, sur la surface F_2 homologue, un système de courbes canoniques passant simplement par les points R_1, mais ne passant pas par les points R_3.

Considérons enfin une surface F_3. L'involution déterminée par I_3 sur cette surface possède des points unis parfaits aux points R_2 et des points unis non parfaits aux points R_1. Aux courbes canoniques d'une surface Φ_3 correspondent donc des courbes canoniques de la surface F_3

homologue passant simplement par les points R_2, mais ne passant pas par les points R_1.

Soient F_1^* une surface du réseau $|F_1|$ et Φ_1^* la surface qui lui correspond sur Ω. Aux systèmes de courbes $|(\Phi_1^*, \Phi_1)|$, $|(\Phi_1^*, \Phi_2)|$, $|(\Phi_1^*, \Phi_3)|$ découpées sur Φ_1^* par les surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3 correspondent sur F_1^* les systèmes de courbes canoniques $|(F_1^*, F_1)|$, $|(F_1^*, F_2)|$, $|(F_1^*, F_3)|$. Il résulte des propriétés qui viennent d'être obtenues que :

Les courbes du premier système ont des points doubles aux points R_2 et des points simples aux points R_3;

Les courbes du second système ont des points simples aux points R_3 et ne passent pas pour les points R_2;

Les courbes du troisième système passent simplement par les points R_2, mais ne passent pas par les points R_3.

Il en résulte que les courbes canoniques de la surface Φ_1^* sont découpées sur cette surface par les surfaces Φ_2. En d'autres termes, l'adjoint du système $|\Phi_1|$ est le système $|\Phi_2|$:

$$|\Phi_1'| = |\Phi_2|.$$

On voit de même que les adjoints des systèmes $|\Phi_2|$, $|\Phi_3|$ sont respectivement les systèmes $|\Phi_3|$, $|\Phi_1|$:

$$|\Phi_2'| = |\Phi_3|, \qquad |\Phi_3'| = |\Phi_1|.$$

6. Des relations qui viennent d'être établies, on déduit que les biadjoints et les triadjoints des systèmes $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, $|\Phi_3|$ sont

$$|\Phi_1''| = |\Phi_2'| = |\Phi_3|, \quad |\Phi_2''| = |\Phi_1|, \quad |\Phi_3''| = |\Phi_2|,$$
$$|\Phi_1'''| = |\Phi_3'| = |\Phi_1|, \quad |\Phi_2'''| = |\Phi_2|, \quad |\Phi_3'''| = |\Phi_3|,$$

Chacun des systèmes $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, $|\Phi_3|$ coïncide donc avec son triadjoint.

Les opérations $|\Phi_2—\Phi_1|$, $|\Phi_3—\Phi_1|$ sont impossibles, et par conséquent la variété Ω est dépourvue de surfaces canonique et bicanonique. Plus généralement, la variété Ω est dépourvue de surfaces $(3i+1)$ — canoniques et $(3i+2)$ — canoniques.

Par contre, la surface $|\Phi_1''' - \Phi_1|$ est une surface tricanonique d'ordre zéro et la variété Ω possède des surfaces $3i$ — canoniques d'ordre zéro.

La variété Ω possède des surfaces $3i$ — canoniques d'ordre zéro, mais est dépourvue de surfaces $(3i+1)$ — canoniques et $(3i+2)$ — canoniques.

7. Soit $|\Psi|$ un système linéaire de surfaces tracées sur Ω. Les adjoints successifs de $|\Psi|$ sont donnés par

$$|\Psi'| = |\Psi + \Phi_1' - \Phi_1| = |\Psi + \Phi_2 - \Phi_1|,$$
$$|\Psi''| = |\Psi + \Phi_2' - \Phi_1| = |\Psi + \Phi_3 - \Phi_1|,$$
$$|\Psi'''| = |\Psi + \Phi_3' - \Phi_1| = |\Psi + \Phi_1 - \Phi_1| = |\Psi|.$$

On en conclut que *sur la variété Ω, l'opération d'adjonction a la période trois*

8. Si une surface F de genres arithmétique et linéaire p_a, $p^{(1)}$ contient une involution cyclique d'ordre trois possédant τ_1 points unis parfaits et τ_2 points unis non parfaits, les genres arithmétique π_a et linéaire $\pi^{(1)}$ de la surface image de l'involution sont, comme nous l'avons établi [1], donnés par les formules.

$$3(p_a + 1) = 9(\pi_a + 1) - \tau_1 - 2\tau_2,$$
$$p^{(1)} - 1 = 3(\pi^{(1)} - 1) + \tau_1.$$

Appliquons ces relations aux surfaces F_1 et Φ_1, F_2 et Φ_2, F_3 et Φ_3. Dans chaque cas on a

$$p_a = 8, p^{(1)} = 19, \quad \tau_1 = \tau_2 = 3,$$

d'où

$$\pi_a = 3, \quad \pi^{(1)} = 6.$$

Les surfaces F_1, F_2, F_3 sont régulières, et il en est par suite de même des surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3.

Les surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3 ont les genres $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 6$.

Liége, le 10 avril 1937.

[1] Les involutions cycliques... (*Loc. cit.*)