Sur une classe de surfaces,

par Lucien GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

A tout point non parabolique d'une surface (x) se trouve attachée une suite de quadriques Φ, Φ_1, ... dont la première est la quadrique de Lie. Nous considérons dans cette note les surfaces pour lesquelles la quadrique Φ_1 est un cône. On voit immédiatement que cette condition entraîne la dégénérescence de cette quadrique en deux plans distincts. Deux espèces de surfaces présentant cette particularité sont connues : ce sont les surfaces dont les quadriques de Lie ont trois points caractéristiques et certaines surfaces dont les lignes asymptotiques des deux modes appartiennent à des complexes linéaires. Nous obtenons une troisième espèce de surfaces. Appelons réglée asymptotique gauche d'une surface le lieu des tangentes aux asymptotiques d'un mode aux points d'une asymptotique de l'autre mode. Nous établissons le théorème suivant :

Les seules surfaces pour lesquelles la quadrique Φ_1 dégénère en deux plans distincts sont les surfaces dont les quadriques de Lie ont trois points caractéristiques, des surfaces (particulières) dont les asymptotiques des deux modes appartiennent à des complexes linéaires et des surfaces (particulières) dont les réglées gauches asymptotiques des deux modes appartiennent à des complexes linéaires spéciaux.

Les premières de ces surfaces ont été considérées par

M. Demoulin (1) et par nous (2). Les secondes l'ont été par C. Segre et M. Terracini (3). On peut les caractériser de la manière suivante : Considérons la suite de Laplace ..., U_1, U, V, V_1, ... attachée à la surface (x), les points U, V étant les images des tangentes asymptotiques à la surface (x) au point x. Pour les surfaces en question, cette suite s'arrête, dans les deux sens, aux points U_1, V_1 en présentant le cas de Laplace. Les courbes (U_1), (V_1) sont planes et situées dans des plans incidents.

Pour les surfaces de la dernière catégorie, la suite de Laplace s'arrête aux points U_2, V_2 en présentant le cas de Laplace et ces points représentent des droites de l'espace.

1. Soit (x) une surface non réglée, rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives homogènes d'un point x de (x) satisfont à un système complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles que l'on peut ramener à la forme (Wilczynski)

$$x^{20} + 2\,b\,x^{01} + c_1\,x = 0,$$
$$x^{02} + 2\,a\,x^{10} + c_2\,x = 0,$$

a et b n'étant pas nulles.

Si x est un point non parabolique de la surface (x), tout point de l'espace a des coordonnées de la forme

$$z_1\,x + z_2\,x^{10} + z_3\,x^{01} + z_4\,x^{11},$$

z_1, z_2, z_3, z_4 sont les coordonnées locales du point considéré par rapport au tétraèdre $x x^{10}\, x^{01}\, x^{11}$. On peut également attacher au point x d'autres tétraèdres, par exemple un tétraèdre

(1) Sur la quadrique de Lie. (*C. R.*, 1908, t. 493-496.)

(2) Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques. (*Bull. de la Soc. Math. de France*, 1929, pp. 26-31.)

(3) Les travaux de ces géomètres se trouvent exposés dans la note « Sulle superficie aventi un sistema, o entrambi, di asintotiche in complessi lineari » d'A. Terracini, insérée dans le t. II de la *Geometria proiettiva differenziale*, de G. Fubini et E. Cech (Bologne, 1927).

ayant pour arêtes opposées les deux directrices de Wilczynski relatives au point x.

La quadrique de Lie Φ et les directrices de Wilczynski r, s ont pour équations locales

$$z_1 z_4 - z_2 z_3 + 2\, ab\, z_4^2 = 0, \qquad (\Phi)$$

$$\frac{z_2}{(\log b)^{01}} = \frac{z_3}{(\log a)^{10}} = \frac{z_4}{-2}, \qquad (r)$$

$$2 z_1 + z_2 (\log a)^{10} + z_3 (\log b)^{01} = 0,\ z_4 = 0. \qquad (s)$$

Nous prendrons comme tétraèdre attaché au point x le tétraèdre ayant pour sommets le point x, le point

$$y = [8\, ab - (\log a)^{10} (\log b)^{01}]\, x + 2\, (\log b)^{01} x^{10} + 2\, (\log a)^{10} x^{01} - 4x^{11}$$

où la droite r coupe une seconde fois Φ, les points

$$m = x (\log a)^{10} - 2\, x^{10},$$
$$n = x (\log b)^{01} - 2\, x^{01},$$

où s coupe respectivement les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} de la surface au point x.

Tout point de l'espace a pour coordonnées locales, par rapport à ce tétraèdre $x\, y\, m\, n$, des quantités z_1', z_2', z_3', z_4' définies par

$$-z_1' x + z_2' m + z_3' n + z_4' y = z_1 x + z_2 x^{10} + z_3 x^{01} + z_4 x^{11}.$$

On passe des z aux z' par les formules

$$\rho z_1 = -z_1' + z_2' (\log a)^{10} + z_3' (\log b)^{01} + z_4' [8\, ab - (\log a)^{10} (\log b)^{01}],$$
$$\rho z_2 = -2 z_2' + 2 z_4' (\log b)^{01},$$
$$\rho z_3 = -2 z_3' + 2 z_4' (\log a)^{10},$$
$$\rho z_4 = -4 z_4'.$$

*

2. Par rapport au tétraèdre $xymn$, la quadrique de Lie a pour équation

$$z_1' z_4' - z_2' z_3' = 0. \tag{Φ}$$

Au point x de la surface (x), nous avons attaché une suite de quadriques Φ, Φ_1, ... telle que deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points, caractéristiques pour les deux quadriques [1]. La quadrique Φ_1 a pour équation, par rapport au tétraèdre $xymn$ [2],

$$z_1'^2 + \alpha z_2'^2 + \beta z_3'^2 + \alpha\beta z_4'^2 + \frac{1}{2a}\beta(\log b^2\beta)^{01}(z_1' z_4' - z_2' z_3') = 0, \tag{Φ_1}$$

où l'on a posé

$$\alpha = 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^2 + 4(b^{01} + c_1),$$
$$\beta = 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_2).$$

Observons que l'équation de Φ_1 est symétrique par rapport à a, b, car on a la relation

$$a\alpha^{10} + 2\alpha a^{10} = b\beta^{01} + 2\beta b^{01}. \tag{I}$$

3. Supposons que α, β ne soient pas nulles et exprimons que la quadrique Φ_1 est conique. Nous avons

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2a}\beta(\log b^2\beta)^{01} \\ 0 & 2\alpha & -\frac{1}{2a}\beta(\log b^2\beta)^{01} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2a}\beta(\log b^2\beta)^{01} & 2\beta & 0 \\ \frac{1}{2a}\beta(\log b^2\beta)^{01} & 0 & 0 & 2\alpha\beta \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

c'est-à-dire

$$[16\, a^2\alpha\beta - \beta^2\overline{(\log b^2\beta)^{01}}]^2 = 0.$$

---

(1) Sur les asymptotiques d'une surface et l'espace réglé. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1927, pp. 812-826; 1928, pp. 31-41.)

(2) Sur quelques éléments associés aux points d'une surface. (*Mém. de la Soc. roy. des Sc. de Liége*, 1932, t. XVII.)

On trouve donc la condition

$$16a^2\alpha = \beta\,\overline{(\log b^2\beta)^{01}}^2. \qquad (2$$

Sous cette condition, le premier membre de l'équation (1) est de caractéristique deux et par suite la quadrique Φ_1 dégénère en deux plans distincts.

Désignons par ξ, η deux racines déterminées des équations

$$\xi^2 + \alpha = 0, \qquad \eta^2 + \beta = 0.$$

L'équation (2) devient

$$2a\xi = \pm\,\eta\,(\log b\eta)^{01}.$$

Observons qu'en utilisant la relation (I), on en déduit

$$2b\eta = \pm\,\xi\,(\log a\xi)^{10}.$$

Nous supposerons dans la suite que l'on a les deux relations équivalentes

$$2a\xi = \eta\,(\log b\eta)^{01}, \qquad 2b\eta = \xi\,(\log a\xi)^{10}. \qquad \text{(II)}$$

4. Sous la condition (II), la quadrique Φ_1 dégénère en deux plans φ_1, φ_2 dont les équations sont respectivement

$$z_1' + \xi z_2' - \eta z_3' - \xi\eta z_4' = 0, \qquad (\varphi_1)$$

$$z_1' - \xi z_2' + \eta z_3' - \xi\eta z_4' = 0. \qquad (\varphi_2)$$

Les quatre points caractéristiques de la quadrique de Lie Φ sont :

Les points y_3 $(\xi\eta, \eta, \xi, 1)$, y_4 $(\xi\eta, -\eta, -\xi, 1)$, appartenant à la droite g commune aux plans φ_1, φ_2 ;

Le point y_1 $(\xi\eta, -\eta, \xi, -1)$ où la quadrique Φ touche le plan φ_1 ;

Le point y_2 $(\xi\eta, \eta, -\xi, -1)$, où la quadrique Φ touche le plan φ_2.

5. Des relations (II), en tenant compte de

$$\beta^{10} = -2h_1(\log bh_1)^{01}, \qquad \alpha^{01} = -2k_1(\log ak_1)^{10},$$

où l'on pose

$$h_1 = -(\log b)^{11} + 4ab, \qquad k_1 = -(\log a)^{11} + 4ab,$$

on déduit, par dérivation,

$$\left.\begin{aligned} &\beta + (\log bh_1)^{02} + (\log bh_1)^{01}(\log b^2h_1)^{01} = (\log bh_1)^{01}(\log b\eta)^{01}, \\ &\alpha + (\log ak_1)^{20} + (\log ak_1)^{10}(\log a^2k_1)^{10} = (\log ak_1)^{10}(\log a\xi)^{10}. \end{aligned}\right\}\text{(III)}$$

En dérivant de nouveau les relations (III), on obtient ensuite

$$\left.\begin{aligned} &\beta h_2\left[(\log b^3h_1^2h_2)^{01} - (\log b\eta)^{01}\right] + h_1(\log b\eta)^{01}\left[\beta + \overline{(\log bh_1)^{01}}^2\right] = 0, \\ &\alpha k_2\left[(\log a^3k_1^2k_2)^{10} - (\log a\xi)^{10}\right] + k_1(\log a\xi)^{10}\left[\alpha + \overline{(\log ak_1)^{10}}^2\right] = 0, \end{aligned}\right\}\text{(IV)}$$

où

$$h_2 = -(\log bh_1)^{11} + h_1, \qquad k_2 = -(\log ak_1)^{11} + k_1.$$

Observons en outre que l'on a

$$\left.\begin{aligned} &(a\xi)^{11} - (\log a)^{01}(a\xi)^{10} - 4ab\,(a\xi) = 0, \\ &(b\eta)^{11} - (\log b)^{10}(b\eta)^{01} - 4ab\,(b\eta) = 0. \end{aligned}\right\}\quad\text{(V)}$$

6. Désignons par Q l'hyperquadrique de l'espace S_5 qui représente les droites de l'espace ordinaire. Nous écrirons sous la forme

$$\Omega(p, q) = 0$$

la condition pour que deux points p, q de S_5 soient conjugués par rapport à Q, l'équation de cette hyperquadrique étant ainsi

$$\Omega(p, p) = 0.$$

Les points

$$U = |\,x \quad x^{10}\,|, \qquad V = |\,x \quad x^{01}\,|$$

représentent sur Q les tangentes asymptotiques au point x à la surface (x). On a

$$U^{10} + 2b\,V = 0, \qquad V^{01} + 2a\,U = 0$$

et les points U, V sont consécutifs dans une suite de Laplace

$$\ldots, U_2, U_1, U, V_1 V_1, V_2, \ldots \qquad (L)$$

Si nous posons

$$M_1 = |x \quad x^{11}|, \quad M_2 = |x^{10} \quad x^{01}|, \quad M_3 = |x^{10} \quad x^{11}|, \quad M_4 = |x^{01} \quad x^{11}|,$$

tout point de S_5 sera représenté par

$$Z_{12} U + Z_{13} V + Z_{14} M_1 + Z_{23} M_2 + Z_{24} M_3 + Z_{34} M_4.$$

Si le point considéré appartient à Q, on aura $Z_{12} = |z_1, z_2|, \ldots$ et les Z seront les coordonnées radiales relatives au tétraèdre de référence $x x^{10}\ x^{01}\ x^{11}$.

Un point de S_5 pourra également être représenté par

$$\mu U + \mu_1 U_1 + \mu_2 U_2 + \lambda V + \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$$

et l'on aura

$$\begin{aligned}
4\mu &= 4Z_{12} + 2(\log b)^{01}(Z_{14} - Z_{23}) + \left[\beta + \overline{(\log b)^{01}}^2\right] Z_{34} - 8\,ab\,Z_{24}, \\
4\lambda &= 4Z_{13} + 2(\log a)^{10}(Z_{14} + Z_{23}) + \left[\alpha + \overline{(\log a)^{10}}^2\right] Z_{24} - 8\,ab\,Z_{34}, \\
2\mu_1 &= Z_{14} - Z_{23} + Z_{34}(\log b^2 h_1)^{01}, \\
2\lambda_1 &= Z_{14} + Z_{23} + Z_{24}(\log a^2 k_1)^{10}, \\
2\mu_2 &= Z_{34}, \\
2\lambda_2 &= Z_{24}.
\end{aligned}$$

A l'aide de ces formules, on trouve aisément que la droite g, intersection des plans φ_1, φ_2, est représentée sur Q par le point

$$G = \xi H + \eta K,$$

où

$$\begin{aligned}
H &= U_2 + U_1(\log b h_1)^{01} + \beta U, \\
K &= V_2 + V_1(\log a k_1)^{10} + \alpha V.
\end{aligned}$$

7. Nous avons indiqué les expressions des points U_3, V_3 en fonction de $U_2, \ldots, V_2$ (1). Dans le cas actuel, en tenant compte des relations (III), on a

$$\begin{aligned}
U_3 + U_2\left[(\log b^3 h_1^2 h_2)^{01} - (\log b\eta)^{01}\right] + H(\log b\eta)^{01} + 2a\,K = 0, \\
V_3 + V_2\left[(\log a^3 k_2^2 k_2)^{10} - (\log a\xi)^{10}\right] + K(\log a\xi)^{10} + 2b\,H = 0.
\end{aligned}$$

(1) Remarque sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie. (*Comptes rendus du Congrès national des Sciences*, 1930.)

On en déduit

$$2a\,G + \eta U_3 + \eta U_2\left[(\log b^3 h_1^2 h_2)^{01} - (\log b\eta)^{01}\right] = 0,$$
$$2b\,G + \xi V_3 + \xi V_2\left[(\log a^3 k_1^2 k_2)^{10} - (\log a\xi)^{10}\right] = 0.$$

Le point G est donc l'intersection des droites $U_2\,U_3$ et $V_2\,V_3$.

Inversement, si nous partons des relations, valables dans le cas général,

$$U_3 + U_2(\log b^3 h_1^2 h_2)^{01} + U_1\left[\beta + (\log b h_1)^{02} + (\log b^2 h_1)^{01}(\log b^2 h_1)^{01}\right] + \beta(\log b\eta)^{01}\,U + 2a\,K = 0,$$

$$V_3 + V_2(\log a^3 k_1^2 k_2)^{10} + V_1\left[\alpha + (\log a k_1)^{20} + (\log a^2 k_1)^{10}(\log a^2 k_2)^{10}\right] + \alpha(\log a\xi)^{10}\,V + 2b\,H = 0,$$

et que nous exprimons que les droites $U_2\,U_3$, $V_2\,V_3$ se rencontrent, on retrouve les relations (II) et (III).

8. Cherchons maintenant les points de rencontre de la droite $U_2\,U_3$ avec Q. Tout point de cette droite est de la forme $U_3 + tU_2$ et les points cherchés seront donnés par

$$t^2\,\Omega(U_2, U_2) + 2t\,\Omega(U_2, U_3) + \Omega(U_3, U_3) = 0.$$

Or, on a, dans le cas actuel,

$$\Omega(U_2, U_3) = -\,\Omega(U_2, U_2)\left(\log\frac{b^2 h_1^2 h_2}{\eta}\right)^{01},$$

$$\Omega(U_3, U_3) = \Omega(U_2, U_2)\left[\left(\log\frac{b^2 h_1^2 h_2}{\eta}\right)^{01}\right]^2,$$

$$\Omega(U_2, U_2) = -\,2\left[\beta + \overline{(\log b h_1)^{01}}^{\,2}\right]\Delta,$$

où

$$\Delta = |\,x \quad x^{10} \quad x^{01} \quad x^{11}\,|.$$

L'équation en t se réduit donc à

$$\Omega(U_2, U_2)\left[t - \left(\log\frac{b^2 h_1^2 h_2}{\eta}\right)^{01}\right]^2 = 0.$$

Par suite, si le point U_2 n'appartient pas à Q, la droite $U_2 U_3$ touche cette hyperquadrique au point g et la surface (g) engendrée par ce point coïncide avec la surface focale (U_3) de la congruence $(U_2 U_3)$. Nous sommes donc conduit à deux hypothèses :

1° Le point U_2 appartient à l'hyperquadrique Q et l'on a

$$\beta + \overline{(\log b h_1)^{01}}^2 = 0.$$

En dérivant cette relation par rapport à u, on a

$$h_2 (\log b h_1)^{01} = 0.$$

Si $(\log bh_1)^{01} = 0$, on a $\beta = 0$, contrairement à l'hypothèse. On doit donc avoir $h_2 = 0$, et la suite de Laplace L s'arrête au point U_2 en présentant le cas de Laplace. Le point U_2 reste fixe lorsque u varie et décrit une courbe (U_2) lorsque v varie.

2° Le point U_2 n'appartient pas à Q et le point U_3 coïncide avec G. On a

$$(\log b^3 h_1^2 h_2)^{01} = (\log b\eta)^{01}.$$

La première des relations (IV) donne alors

$$h_1 (\log b\eta)^{01} \left[\beta + \overline{(\log b h_1)^{01}}^2\right] = 0.$$

On ne peut avoir $h_1 = 0$, car alors la suite L se terminerait au point U_1. Le dernier facteur n'est pas nul par hypothèse ; on a donc $(\log b\eta)^{01} = 0$. Mais alors, la première des relations (II) donne $\xi = 0$; d'où $\alpha = 0$, contrairement à l'hypothèse. Le second cas ne peut donc se présenter.

9. La suite L s'arrête donc au point U_2 et, de même, au point V_2, en présentant le cas de Laplace. On a $h_2 = 0$, $k_2 = 0$, c'est-à-dire

$$(\log b h_1)^{11} = h_1, \qquad (\log a k_1)^{11} = k_1.$$

De plus, on a

$$\xi = \pm (\log a k_1)^{10}, \qquad \eta = \pm (\log b h_2) .$$

La droite $U_1 U_2$ coupe Q en deux points distincts

$$U_2 + [(\log bh_1)^{01} + \eta]\, U_1, \qquad U_2 + [(\log bh_1)^{01} - \eta]\, U_1,$$

dont un coïncide avec le point U_2. De même, la droite $V_1 V_2$ coupe Q en deux points dont un seul coïncide avec V_2.

Le point U_2 représente une droite ayant pour équations locales, par rapport au tétraèdre $xymn$,

$$z_1' + z_3'(\log bh_1)^{01} = 0, \qquad z_2' + z_4'(\log bh_1)^{01} = 0.$$

Cette droite doit coïncider avec l'une des droites $y_1 y_3$, $y_2 y_3$, $y_2 y_3$, $y_2 y_4$. Supposons, pour fixer les idées, que ce soit avec la première [1]. On a alors

$$\eta + (\log bh_1)^{01} = 0.$$

Le point V_2 représente de même une droite d'équations locales

$$z_1' + z_2'(\log ak_1)^{10} = 0, \qquad z_3' + z_4'(\log ak_1)^{10} = 0.$$

Cette droite doit rencontrer la droite $y_1 y_3$ au point y_1, le faisceau de rayons (y_1, φ_1) ayant pour image sur Q la droite $U_2 V_2$. La droite en question coïncide donc avec $y_1 y_3$ et l'on a

$$\xi + (\log ak_1)^{10} = 0.$$

10. L'hyperplan polaire du point U_2 par rapport à Q est $VV_1 V_2 V_2^{10} V_2^{20}$. Lorsque u varie, U_2 et cet hyperplan restent fixes; le point V décrit, sur la surface (V), une courbe dont les points représentent les tangentes asymptotiques xx^{01} de la surface (x) dont les points de contact sont sur une asymptotique u. Nous dirons que le lieu de ces tangentes est la réglée asymptotique gauche circonscrite à la surface (x) le long de cette courbe u. Dans le cas actuel, cette réglée appartient au com-

[1] On voit aisément que la droite en question ne peut coïncider qu'avec $y_1 y_3$ ou $y_2 y_4$.

plexe linéaire spécial d'axe $y_1\, y_3$. On obtient une propriété analogue pour les réglées asymptotiques gauches circonscrites à la surface (x) le long des courbes v. La surface (x) possède donc la propriété que ses réglées gauches asymptotiques des deux systèmes appartiennent à des complexes linéaires spéciaux.

Observons que l'on a

$$U_2^{01} + U_2 \left(\log \frac{b h_1}{\eta} \right)^{01} + H (\log b\eta)^{01} + 2a\, K = 0.$$

On en déduit aisément

$$\Omega(U_2^{01}, U_2^{01}) = \Omega(U_2, U_2^{01}) = \Omega(U_2, U_2) = 0;$$

par suite la droite $U_2\, U_2^{01}$ appartient tout entière à l'hyperquadrique Q et la droite $y_1\, y_3$ engendre une développable. Il en est de même de la droite $y_1\, y_2$.

Liége, le 29 novembre 1932