Sur l'impossibilité de couples de surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

M. Demoulin a montré l'existence de couples de surfaces ayant mêmes quadriques de Lie et en a fait l'étude (1). Nous avons plus tard rencontré ces couples de surfaces de la manière suivante : A une surface (x) de l'espace ordinaire, nous attachons, dans l'espace réglé, une suite de Laplace L dont deux éléments consécutifs sont constitués par les tangentes asymptotiques de la surface (x). Si la suite L est de période six, les quadriques de Lie de la surface (x) sont en même temps les quadriques de Lie d'une seconde surface, et ce fait se présente dans ce cas seulement (2). La généralisation naturelle des couples de surfaces de M. Demoulin conduit à rechercher si la suite L peut être de période huit. Si l'existence de telles suites L était démontrée, il existerait des couples de surfaces (x), (y) dont les quadriques de Lie se toucheraient en quatre points, caractéristiques pour chacune de ces quadriques. En d'autres termes, les surfaces (x), (y) auraient mêmes quadrilatères de Demoulin. Dans cette note, nous démontrons l'impossibilité de tels couples de surfaces.

---

(1) Sur la quadrique de Lie (*C. R.*, 1908, t. 147, pp. 493-496); Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques (*C. R.*, 1924, t. 179, pp. 20-22).

(2) Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1927, pp. 812-826; 1928, pp. 31-41); Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie (*Ibid.*, 1928, pp. 158-186, 335-348, 455-466).

Il ne peut exister de couples de surfaces dont les quadriques de Lie se touchent en quatre points, caractéristiques pour chacune de ces quadriques.

1. Soit (x) une surface non réglée, rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 d'un point x de la surface satisfont à un système d'équations aux dérivées partielles, complètement intégrable, que l'on peut mettre sous la forme (Wilczynski)

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0,$$
$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0,$$

a et b n'étant pas identiquement nulles.

A un point x non parabolique de la surface (x), attachons le tétraèdre ayant pour sommets le point x, le point

$$y = [8\,ab - (\log a)^{10}(\log b^{10})]\,x + 2\,(\log b)^{01}\,x^{10} + 2\,(\log a)^{10}x^{01} - 4\,x^{11}$$

où la première directrice de Wilczynski r rencontre une seconde fois la quadrique de Lie Φ, les points

$$m = x\,(\log a)^{10} - 2x^{10}, \qquad n = x\,(\log b)^{01} - 2x^{01},$$

où la seconde directrice de Wilczynski s rencontre les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} à la surface au point x.

Tout point de l'espace a des coordonnées de la forme

$$y_1 x + y_2 m + y_3 n + y_4 y;$$

nous dirons que y_1, y_2, y_3, y_4 sont les coordonnées locales de ce point.

On a les relations

$$2x^{10} = x\,(\log a)^{10} - m, \qquad 2x^{01} = x\,(\log b)^{01} - n,$$
$$2m^{10} = \alpha x - m\,(\log a)^{10} - 4bn,$$
$$2m^{01} = -\,2k_1 x + m\,(\log b)^{01} + y,$$
$$2n^{10} = -\,2h_1 x + n\,(\log a)^{10} + y,$$
$$2n^{01} = \beta x - 4am - n\,(\log b)^{01},$$
$$2y^{10} = -\,4b\beta x + 2h_1 m - \alpha n - y\,(\log a)^{10},$$
$$2y^{01} = -\,4a\alpha x - \beta m + 2k_1 n - y\,(\log b)^{01},$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}
\alpha &= 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^2 + 4(b^{01} + c_1),\\
\beta &= 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_2),\\
h_1 &= -(\log b)^{11} + 4ab,\\
k_1 &= -(\log a)^{11} + 4ab.
\end{aligned}$$

On en déduit les formules

$$\begin{aligned}
2y_1^{10} &= -y_1(\log a)^{10} - \alpha y_2 + 2h_1y_3 + 4b\beta y_4,\\
2y_2^{10} &= y_1 + y_2(\log a)^{10} - 2h_1y_4,\\
2y_3^{10} &= 4by_2 - y_3(\log a)^{10} + \alpha y_4,\\
2y_4^{10} &= -y_3 + y_4(\log a)^{10},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
2y_1^{01} &= -y_1(\log b)^{01} + 2k_1y_2 - \beta y_3 + 4a\alpha y_4,\\
2y_2^{01} &= -y_2(\log b)^{01} + 4ay_3 + \beta y_4,\\
2y_3^{01} &= y_1 + y_3(\log b)^{01} - 2k_1y_4,\\
2y_4^{01} &= -y_2 + y_4(\log b)^{01}.
\end{aligned}$$

2. La quadrique de Lie Φ attachée à la surface (x) au point x a pour équation locale

$$y_1y_4 + y_2y_3 = 0 \tag{1}$$

et la quadrique Φ_1,

$$y_1^2 + \alpha y_2^2 + \beta y_3^2 + \alpha\beta y_4^2 - \frac{\beta(\log b^2\beta)^{01}}{2a}(y_1y_4 + y_2y_3) = 0. \tag{2}$$

Les points caractéristiques de la quadrique de Lie Φ sont données par les équations (1) et

$$y_2^2 + \beta y_4^2 = 0, \qquad y_3^2 + \alpha y_4^2 = 0.$$

Ces points sont donc, outre le point x, les quatre points

$$\xi\eta, \qquad \eta, \qquad \xi, -1,$$

où ξ, η satisfont aux équations

$$\xi^2 + \alpha = 0, \qquad \eta^2 + \beta = 0.$$

*

Si, comme nous le supposerons, α et β ne sont pas nulles, ces quatre points sont distincts.

Les points caractéristiques de la quadrique Φ_1 sont donnés par les équations (2) et

$$\beta_1 (y_1 y_4 + y_2 y_3) + 2a (y_1 y_3 - \alpha y_2 y_4) - 2a (\log b h_1)^{01} (y_3^2 + \alpha y_4^2) = 0, \quad (3)$$

$$\alpha_1 (y_1 y_4 + y_2 y_3) + 2b (y_1 y_2 - \beta y_3 y_4) - 2b (\log a k_1)^{10} (y_2^2 + \beta y_4^2) = 0, \quad (4)$$

où l'on a posé

$$\alpha_1 = \alpha + (\log a k_1)^{20} + (\log a k_1)^{10} (\log a^2 k_1)^{10},$$

$$\beta_1 = \beta + (\log b h_1)^{02} + (\log b h_1)^{01} (\log b^2 h_1)^{01}.$$

Ces points caractéristiques sont en général au nombre de huit et parmi ceux-ci se trouvent les quatre points caractéristiques de la quadrique de Lie, distincts du point x. Les quadriques Φ, Φ_1, se touchent en ces quatre points et ont en commun le quadrilatère de Demoulin, ayant ces points pour sommets.

Supposons que les quatre autres points caractéristiques de la quadrique Φ_1 soient confondus en un point g. Alors le point g engendre une surface (g) dont Φ_1 est la quadrique de Lie attachée au point g ; nous allons nous occuper de ce cas.

3. Dans le faisceau déterminé par les quadriques (2) et (3), ou (2) et (4), il doit exister une quadrique dégénérée en deux plans se coupant suivant une droite passant par g et appartenant à Φ_1. Les deux droites ainsi obtenues sont les tangentes asymptotiques de la surface (g) au point g. De plus, les deux plans en question doivent passer par les quatre points caractéristiques de la quadrique de Lie distincts du point x.

Les quadriques (2) et (3) passent par les droites

$$y_3 - \xi y_4 = 0, \qquad y_1 + \xi y_2 = 0,$$

$$y_3 + \xi y_4 = 0, \qquad y_1 - \xi y_2 = 0,$$

qui sont deux arêtes opposées du quadrilatère de Demoulin. La condition pour que deux plans

$$\left.\begin{aligned} y_1 + \xi y_2 - \lambda(y_3 - \xi y_4) = 0, \\ y_1 - \xi y_2 - \mu(y_3 + \xi y_4) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

passant respectivement par ces droites, coupent Φ_1 suivant une même génératrice de l'autre mode, est

$$4a\xi(\lambda\mu + \beta) - \beta(\log b^2\beta)^{01}(\lambda - \mu) = 0. \tag{6}$$

Représentons par Φ_1 le premier membre de l'équation (2), par Φ'_1 celui de l'équation (3). Les conditions pour que la quadrique

$$\Phi_1 + \varphi\Phi'_1 = 0$$

soit formée par les plans (5) sont

$$\left.\begin{aligned} -\xi\beta(\log b^2\beta)^{01} + 2a\xi\beta_1\varphi + 2a\alpha(\lambda - \mu) = 0, \\ 2a\varphi + \lambda + \mu = 0, \\ \beta(\log b^2\beta)^{01}(\lambda - \mu) - 8a\xi\beta + 8a^2\xi\varphi(\log bh_1)^{01} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

L'élimination de φ, λ, μ entre les relations (6) et (7) donne la condition

$$\frac{\beta}{4a^2}[\beta\beta_1(\log b^2\beta)^{01} - 8a^2\alpha(\log bh_1)^{01}]^2 + \frac{[16a^2\alpha\beta - \beta(\log b^2\beta)^{01}]^2}{4a}$$
$$- [2\xi\beta\beta_1 - \xi(\log bh_1)^{01}\beta(\log b^2\beta)^{01}]^2$$
$$-\frac{\beta(\log b^2\beta)^{01}}{a}\left[\beta\beta_1 - \frac{\beta(\log b^2\beta)^{01}(\log bh_1)^{01}}{2}\right]\left[\frac{\beta\beta_1(\log b^2\beta)^{01}}{2a} - 4a\alpha(\log bh_1)^{01}\right] = 0.$$

Cette relation se décompose en deux autres :

$$16a^2\alpha - \beta\,\overline{(\log b^2\beta)^{01}}^2 = 0, \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} \beta\beta_1^2 + 4a^2\alpha\,\overline{(\log bh_1)^{01}}^2 + \frac{\beta}{4}\left[16a^2\alpha - \beta\,\overline{(\log b^2\beta)^{01}}^2\right] \\ - \beta\beta_1(\log bh_1)^{01}(\log b^2\beta)^{01} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

4. Supposons que la relation (8) soit vérifiée. On sait qu'alors la quadrique Φ_1 dégénère en deux plans [1].

[1] Sur une classe de Surfaces (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1932, pp. 1015-1025).

On a identiquement

$$b\beta(\log b^2\beta)^{01} = a\alpha(\log a^2\alpha)^{10}$$

et par suite, de la relation (8) on déduit

$$16 b^2\beta - \alpha\,\overline{(\log a^2\alpha)^{10}}^2 = 0. \tag{8'}$$

En dérivant la relation (8) par rapport à u et la relation (8′) par rapport à v, on obtient

$$2\beta_1 = (\log bh_1)^{01}(\log b^2\beta)^{01},$$
$$2\alpha_1 = (\log ak_1)^{10}(\log a^2\alpha)^{10}.$$

En tenant compte de ces relations, on démontre que la relation (9) est une conséquence de la relation (8). D'autre part, les relations (7) et (8) donnent

$$\lambda = -\mu = -\frac{\beta(\log b^2\beta)^{01}}{4a\xi}, \quad \varphi = 0,$$

ce qui montre bien que la quadrique Φ_1 dégénère en deux plans. Sous l'hypothèse (8), la condition de la dégénérescence la quadrique

$$\Phi_1 + \varphi\Phi_1' = 0$$

deux plans s'écrit d'ailleurs

$$\varphi\left[\alpha\beta - (\log bh_1)^{01}\left\{\beta - a\varphi(\log bh_1)^{01}\right\}\right] = 0.$$

5. Nous allons maintenant nous placer dans l'hypothèse où la relation (9) est seule vérifiée. La relation (9) peut s'écrire sous la forme

$$\left.\begin{aligned} &\beta\left[2\beta_1 - (\log bh_1)^{01}(\log b^2\beta)^{01}\right]^2 \\ &+\left[16a^2\alpha - \beta\,\overline{(\log b^2\beta)^{01}}^2\right]\left[\beta + \overline{(\log bh_1)^{01}}^2\right] = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9'}$$

ou encore sous la forme

$$4\left[\beta_1^2 + 4a^2\alpha\right]\left[\beta + \overline{(\log bh_1)^{01}}^2\right] - \left[2\beta_1(\log bh_1)^{01} + \beta(\log b^2\beta)^{01}\right]^2 = 0. \tag{9''}$$

Observons que l'on a

$$[\beta + \overline{(\log b h_1)^{01}}^2]^{10} = -2 h_2 (\log b h_1)^{01},$$

où

$$h_2 = -(\log b h_1)^{11} + h_1.$$

On sait que si $(\log bh_1)^{01} = 0$, la quadrique de Lie Φ a au plus trois points caractéristiques; par suite, $\beta + \overline{(\log bh_1)^{01}}^2$ ne peut être nulle, h_2 n'étant pas nulle par hypothèse. Il en résulte que

$$2\beta_1 - (\log b h_1)^{01} (\log b^2 \beta)^{01}$$

ne peut être nulle.

Des équations (7) on tire

$$2a\varphi\,[\beta\beta_1 (\log b^2\beta)^{01} - 8a^2\alpha (\log bh_1)^{01}] = \beta\,[\beta\,\overline{(\log b^2\beta)^{01}}^2 - 16a^2\alpha]. \quad (10)$$

D'autre part, la condition pour que la quadrique

$$\Phi_1 + \varphi\Phi_1' = 0$$

dégénère en deux plans est

$$16a^2\alpha\,[\beta - a\varphi (\log b h_1)^{01}] - 16 a^4\alpha\varphi^2 - [\beta (\log b^2\beta)^{01} - 2a\beta_1\varphi] = 0. \quad (11)$$

On en déduit la condition

$$2\beta_1\,[2\beta_1 - (\log bh_1)^{01} (\log b^2\beta)^{01}] - [\beta\,\overline{(\log b^2\beta)^{01}}^2 - 2a\beta_1\varphi] = 0. \quad (12)$$

En combinant les relations (9′) et (12′), on trouve

$$2\beta_1 (\log b h_1)^{01} + \beta (\log b^2\beta)^{01} = 0. \quad (13)$$

L'équation (9″) donne alors

$$\beta_1^2 + 4a^2\alpha = 0. \quad (14)$$

Mais cette relation, portée dans (11), donne

$$\beta (\log b^2\beta)^{01} - 16a^2\alpha = 0,$$

contrairement à l'hypothèse. Cela provient de ce que la relation (14) entraîne la dégénérescence en deux plans de la quadrique Φ_1'. D'ailleurs, la relation (13) montre que dans (10) le coefficient de φ est identiquement nul.

6. Nous allons donc partir de l'hypothèse

$$\beta_1^2 + 4a^2\alpha = 0. \tag{14}$$

Sans cette condition, l'équation (3) de la quadrique Φ_1' s'écrit

$$(2ay_3 + \beta_1 y_4)[2ay_1 + \beta_1 y_2 + 2\beta_1 y_4 (\log b h_1)^{01}] = 0.$$

Pour notre objet, la droite commune aux deux plans formant cette quadrique doit appartenir à la quadrique Φ_1, ce qui entraîne la relation

$$2\beta_1 (\log b h_1)^{01} + \beta (\log b^2 \beta)^{01} = 0. \tag{13}$$

Observons que l'on a

$$\beta_1^{10} = - h_2 (\log b^3 h_1^2 h_2)^{01} + 4ab (\log b h_1)^{01}.$$

En dérivant la relation (14) par rapport à u, on a

$$\beta_1 h_2 (\log b^3 h_1^2 h_2)^{01} = 2ab\,[2\beta_1 (\log b h_1)^{01} + \beta (\log b^2 \beta)^{01}];$$

par suite,

$$h_2 (\log b^3 h_1^2 h_2)^{01} = 0. \tag{15}$$

7. Désignons par Q l'hyperquadrique d'un espace linéaire à cinq dimensions qui représente les droites de l'espace ordinaire. Soient

$$U = |\, x \quad x^{10} \,|, \qquad V = |\, x \quad x^{01} \,|$$

les points de Q qui représentent les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} au point x à la surface (x). On a

$$U^{10} + 2bV = 0, \qquad V^{01} + 2aU = 0$$

et les points U, V sont consécutifs dans une suite de Laplace

$$\ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots \tag{L}$$

On a

$$U_n = U_{n-1}^{01} - U_{n-1} (\log b h_1 \ldots h_{n-1})^{01},$$
$$V_n = V_{n-1}^{10} - V_{n-1} (\log a k_1 \ldots k_{n-1})^{10},$$

où l'on pose

$$h_n = -(\log bh_1 \dots h_{n-1})^{11} + h_{n-1},$$
$$k_n = -(\log ak_1 \dots k_{n-1})^{11} + k_{n-1}.$$

La représentation sur Q des arêtes du tétraèdre $xmny$ est donnée par les relations

$$|x \quad m| + 2U = 0,$$
$$|x \quad n| + 2V = 0,$$
$$|x \quad y| + 2(U_1 + V_1) = 0,$$
$$|m \quad n| + 2(U_1 - V_1) = 0,$$
$$|m \quad y| - 4V_2 - 4V_1(\log ak_1)^{10} - 2\alpha V = 0,$$
$$|n \quad y| - 4U_2 - 4U_1(\log bh_1)^{01} - 2\beta U = 0.$$

D'autre part, on a

$$\left.\begin{aligned} &2U_3 + 2U_2(\log b^3h_1^2h_2)^{01} + 2\beta_1 U_1 + \beta(\log b^2\beta)^{01} U \\ &\quad + 4a[V_2 + V_1(\log ak_1)^{10} + \alpha V] = 0, \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

$$\left.\begin{aligned} &2V_3 + 2V_2(\log a^3k_1^2k_2)^{10} + 2\alpha_1 V_1 + \alpha(\log a^2\alpha)^{10} V \\ &\quad + 4b[U_2 + U_1(\log bh_1)^{01} + \beta U] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (17$$

8. La droite commune aux plans formant la quadrique Φ'_1 est représentée sur Q par le point

$$H = \beta_1 U_1 - \beta_1(\log bh_1)^{01} U + 2a[V_2 + V_1(\log ak_1)^{10} + \alpha V].$$

Comparons cette relation à la formule (16) en tenant compte de (13). Il vient

$$H + U_3 + U_2(\log b^3h_1^2h_2)^{01} = 0.$$

Si l'on opère sur la quadrique (4) comme sur la quadrique (3), on trouve que la quadrique (4) se décompose en deux plans

$$2by_2 + \alpha_1 y_4 = 0,$$
$$2by_1 + \alpha_1 y_3 + 2\alpha_1 y_4(\log ak_1)^{10} = 0.$$

Si l'on écrit de plus que la droite commune à ces deux plans appartient à Φ_1, on trouve les conditions

$$\alpha_1^2 + 4b^2\beta = 0, \quad (18)$$
$$2\alpha_1(\log ak_1)^{10} + \alpha(\log a^2\alpha)^{10} = 0. \quad (19)$$

On trouve ensuite

$$k_2 (\log a^3 k_1^2 k_2)^{10} = 0. \tag{20}$$

La droite commune aux deux plans envisagés est représentée sur Q par le point

$$K = \alpha_1 V_1 - \alpha_1 (\log a k_1)^{10} V + 2b [U_2 + U_1 (\log b h_1)^{01} + \beta U],$$

et l'on a

$$K + V_3 + V_2 (\log a^3 k_1^2 k_2)^{01} = 0.$$

Nous supposons la suite L illimitée dans les deux sens et par suite h_2, k_2 ne peuvent être nulles. Par (15) et (20), on a donc

$$(\log b^3 h_1^2 h_2)^{01} = 0, \qquad (\log a^3 k_1^2 k_2)^{10} = 0.$$

Les points H, K coïncident respectivement avec U_3 et V_3 et l'on a

$$U_3 + \beta_1 U_1 - \beta_1 (\log b h_1)^{01} U + 2a [V_2 + V_1 (\log a k_1)^{10} + \alpha V] = 0,$$
$$V_3 + \alpha_1 V_1 - \alpha_1 (\log a k_1)^{10} V + 2b [U_2 + U_1 (\log b h_1)^{01} + \beta U] = 0.$$

On a

$$h_3 = -(\log b^3 h_1^2 h_2)^{11} + 4ab = 4ab,$$

$$U_4 = U_3^{01} - U_3 (\log b h_1 h_2 h_3)^{01} = U_3^{01} + U_3 \left(\log \frac{b h_1}{a}\right)^{01}.$$

Pour notre objet, U_3 et V_3 doivent être les transformés de Laplace l'un de l'autre; ces points représentent les tangentes asymptotiques de la surface (g) au point g. Le point U_4 doit par suite coïncider avec V_3. Il en résulte que l'expression de U_4, fournie par U_3, ne peut contenir de terme en V_2. Or, cette expression contient le terme

$$2a (\log b h_1)^{01} V_2.$$

On devrait donc avoir $(\log b h_1)^{01} = 0$, mais cela entraîne comme conséquence $\beta = 0$, contrairement à l'hypothèse. Le cas examiné doit donc être rejeté.

Liége, le 24 décembre 1932.