SUR DEUX INVOLUTIONS CYCLIQUES DU TROISIÈME ORDRE APPARTENANT A UNE VARIÉTÉ ALGÉBRIQUE A TROIS DIMENSIONS;

Par M. Lucien GODEAUX.

Dans nos travaux antérieurs, nous avons étudié les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et n'ayant qu'un nombre fini de points unis ([1]); nous nous proposons de faire une étude analogue pour les variétés algébriques à trois dimensions. Nous commencerons par étudier les involutions cycliques appartenant à une variété algébrique V_3, à trois dimensions, possédant une surface canonique et des surfaces pluricanoniques d'ordre zéro, c'est-à-dire sur laquelle tout système linéaire de surfaces est son propre adjoint.

On sait que sur une surface algébrique ayant des courbes canonique et pluricanoniques d'ordre zéro ($p_a = P_4 = 1$), une involution du second ordre est de genres un ($p_a = P_4 = 1$), ou de genres zéro et bigenre un ($p_a = P_3 = 0, P_2 = 1$) suivant qu'elle possède un nombre fini de points unis (exactement huit) ou qu'elle ne possède pas de points unis. Dans ce dernier cas, la surface image de l'involution est dépourvue de courbe canonique, mais possède une courbe bicanonique d'ordre zéro (surface d'Enriques). Nous nous sommes demandé ce qui correspondait à ce théorème dans le cas des variétés à trois dimensions.

Nous avons établi récemment que si une variété V_3 à surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro possède une involution du second ordre, la variété image de cette involution est à surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro si l'involution est dépourvue de points unis ou possède une courbe unie; elle est dépourvue de surface canonique, mais possède une surface bicanonique d'ordre

([1]) On trouvera un exposé de nos recherches dans notre exposé *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

zéro si l'involution possède un nombre fini (positif) de points unis ([1]).

Dans cette Note, nous nous proposons d'étudier deux involutions cycliques du troisième ordre, appartenant à une variété V_3 à surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro.

L'une d'elles possède une courbe unie et a pour image une variété à surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro. La seconde possède un nombre fini de points unis; elle a pour image une variété dépourvue de surfaces canonique et bicanonique, mais elle possède une surface tricanonique d'ordre zéro. Ainsi se trouve établie *l'existence de variétés algébriques à trois dimensions sur lesquelles tout système linéaire de surfaces est distinct de son adjoint et de son biadjoint, mais coïncide avec son triadjoint.*

1. Rapportons projectivement les quadriques d'un espace linéaire S_3 aux hyperplans d'un espace linéaire S_9 à neuf dimensions. A cet effet, x_1, x_2, x_3, x_4 étant les coordonnées d'un point de S_3 posons

$$\rho X_{ik} = x_i x_k, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4), \qquad (X_{ik} = X_{ki}),$$

et interprétons les X_{ik} comme coordonnées projectives de S_9. Aux points de S_3 correspondent les points d'une variété V_3^8, à trois dimensions, d'ordre huit, dont les équations s'obtiennent en écrivant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{12} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{13} & X_{23} & X_{33} & X_{34} \\ X_{14} & X_{24} & X_{34} & X_{44} \end{vmatrix}$$

est de caractéristique un.

Aux droites de S_3 correspondent, sur la variété V_3^8, des coniques et aux plans de S_3, des surfaces de Véronèse formant un système linéaire homaloïdal.

2. Considérons un espace linéaire S_{10} à dix dimensions, dont nous désignerons les coordonnées par X_0, X_{11}, X_{22}, ..., X_{34}, et

([1]) *Sur les involutions du second ordre appartenant à certaines variétés algébriques à trois dimensions* (*C. R. Acad. Sc.*, déc. 1935, p. 1169-1170).

supposons que l'hyperplan $X_0 = 0$ soit précisément l'espace S_9 contenant la variété V_3^8 que nous venons de considérer. Désignons par O_0 le point de S_{10} dont toutes les coordonnées sont nulles sauf X_0. Les équations de V_3^8 représentent, dans S_{10}, le cône V_4^8, à quatre dimensions, projetant V_3^8 de O_0.

Coupons ce cône par une hypersurface V_9^n, d'ordre n, ne passent pas par O_0 et dont nous écrivons l'équation sous la forme

$$(1) \qquad X_0^n \alpha_0 + X_0^{n-1} \alpha_1 + \ldots + X_0 \alpha_{n-1} + \alpha_n = 0,$$

les α étant des formes algébriques en $X_{11}, X_{22}, \ldots, X_{34}$, dont les degrés sont indiqués par les indices. Nous obtenons ainsi une variété à trois dimensions, d'ordre $8n$, V_3^{8n}.

Nous désignerons par $|F|$ le système sur sections hyperplanes de V_3^{8n}.

Le cône du quatrième ordre à trois dimensions, projetant de O_0 une des surfaces de Véronèse appartenant à V_3^8, est rencontré par l'hypersurface V_9^n suivant une surface que nous désignerons par F_0. Les surfaces F_0 forment, sur V_3^{8n}, un système linéaire $|F_0|$ de dimension trois et de degré n.

L'hypersurface V_9^n découpe, sur un cône projetant de O_0 une conique de V_3^8, une courbe C d'ordre $2n$ et de genre $(n-1)^2$. Il existe, sur V_3^{8n}, ∞^4 courbes C et deux surfaces F_0 ont en commun une courbe C.

On a, d'autre part,

$$|F| = |2F_0|.$$

3. Les courbes C appartenant à une surface F_0 forment un réseau. Le système canonique d'une surface F_0 est le système (1)

$$|(2n-5)C|.$$

Par conséquent, le système adjoint $|F_0'|$ à $|F_0|$ est le système

$$|F_0'| = |(2n-5)F_0|,$$

et le système canonique de V_3^{8n} est

$$|(2n-6)F_0| = |(n-3)F|.$$

---

(1) *Sur une famille de surfaces algébriques de l'espace à six dimensions* (*Bull. de la Soc. Math. de France*, 1925, p. 484-503).

On peut retrouver ce résultat par une autre voie. Considérons la surface F découpée sur V_3^{8n} par l'hyperplan

$$\xi_0 X_0 + \xi_{11} X_{11} + \ldots + \xi_{34} X_{34} = 0.$$

Éliminons X_0 entre cette équation et l'équation (1) de V_9^n, puis remplaçons les X_{ik} par leurs expressions en fonction des x. On obtient ainsi, dans S_3, l'équation d'une surface F^*, d'ordre $2n$, birationnellement identique à F.

Les adjointes de la surface F^* sont les surfaces d'ordre $2n - 4$, de S_3. A ces surfaces correspondent, sur V_3^8, les sections de cette variété par les hypersurfaces d'ordre $n - 2$ de l'hyperplan $X_0 = 0$. Il en résulte que le système adjoint au système $|F|$ est le système

$$|F'| = |(n-2)F|,$$

d'où l'on déduit que le système canonique de V_3^{8n} est bien

$$|F' - F| = |(n-3)F|.$$

4. Le système canonique de la variété V_3^{8n} est découpé sur celle-ci par les hypersurfaces d'ordre $n - 3$. Pour évaluer le genre géométrique de cette variété, nous transformerons la variété V_3^{8n} en une variété appartenant à un espace linéaire à quatre dimensions, et nous supposerons $n \geqq 3$.

Posons

$$(2) \qquad \rho X_0 = y_0 y_1, \qquad \rho X_{ik} = y_i y_k, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

et interprétons y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 comme coordonnées projectives des points d'un espace S_4.

A la variété V_3^{8n} correspond dans S_4 une hypersurface dont l'équation s'obtient en faisant, dans l'équation (1), la substitution (2). On obtient ainsi une équation que nous écrirons sous la forme

$$(3) \qquad y_0^n y_1^n \beta_0 + y_0^{n-1} y_1^{n-1} \varphi_2 + \ldots + y_0 y_1 \beta_{2n-2} + \beta_{2n} = 0.$$

où β_0, β_2, ..., β_{2n-2}, β_{2n} sont des formes algébriques en y_1, y_2, y_3, y_4 dont les degrés sont indiqués par les indices.

La variété (3), d'ordre $2n$, possède un point A (1, 0, 0, 0, 0), la multiplicité n, le cône tangent à la variété en ce point étant formé de l'hyperplan $y_1 = 0$ compté n fois.

Aux sections du cône V_4^8 par les hypersurfaces d'ordre $n-3$ de S_{10} correspondent dans S_4 les hypersurfaces d'ordre $2n-6$ ayant la multiplicité $n-3$ en A, le cône tangent en ce point étant réduit à l'hyperplan $y_1 = 0$ compté $n-3$ fois. L'équation d'une telle hypersurface peut s'écrire

$$(4) \qquad y_0^{n-3} y_1^{n-3} \lambda_0 + y_0^{n-4} y_1^{n-4} \lambda_2 + \ldots + y_0 y_1 \lambda_{2n-8} + \lambda_{2n-6} = 0,$$

où $\lambda_0, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n-8}, \lambda_{2n-6}$ sont des formes algébriques en y_1, y_2, y_3, y_4 dont les degrés sont indiqués par les indices.

D'après ce que nous avons établi, les hypersurfaces (4) découpent, sur la variété (3), les surfaces canoniques de cette variété. D'autre part, les hypersurfaces adjointes de la variété (3) sont d'ordre $2n-5$. On pourrait montrer, comme nous l'avons fait ailleurs dans le cas des surfaces [1], que ces adjointes sont formées de l'hyperplan $y_1 = 0$ et des hypersurfaces (4).

Le nombre des coefficients des hypersurfaces (4) est égal à

$$\frac{1}{6}(n-2)(2n^3 - 12n^2 + 37n - 51).$$

Par conséquent, *le genre géométrique de la variété* V_3^{8n} *est*

$$P_g = \frac{1}{6}(n-2)(2n^3 - 12n^2 + 37n - 51).$$

D'autre part, les surfaces F_0 sont régulières et ont en commun des courbes irréductibles, donc *l'irrégularité superficielle de la variété* V_3^{8n} *est nulle.*

5. Examinons quelques cas particuliers de la variété V_3^{8n}.

Pour $n = 1$, on obtient évidemment une variété rationnelle.

Pour $n = 2$, on obtient une variété V_3^{16} dépourvue de surfaces canonique et pluricanoniques. Une section hyperplane de cette variété est birationnellement équivalente à une surface du quatrième ordre de S_3, et, par conséquent, les sections hyperplanes de la variété V_3^{16} sont des surfaces de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Il reste à examiner si cette variété est rationnelle (c'est-à-dire représentable point par point sur l'espace S_3). On remarque que la

---

[1] *Sur une famille de surfaces...* (*loc. cit.*)

variété V_3^{16} est dépourvue de surfaces canonique et pluricanoniques; la formule établie plus haut (pour $n \geqq 3$) donnait, pour $n = 2$, $P_g = 0$.

Pour $n = 3$, on obtient une variété V_3^{24} dont le système canonique est formé d'une seule surface d'ordre zéro ($P_g = 1$). Le système $|F|$ des sections hyperplanes est son propre adjoint, et il en est de même par la suite de tout système linéaire de surfaces appartenant à la variété : les surfaces pluricanoniques de celle-ci sont d'ordre zéro.

Une surface F est régulière, elle a les genres $p_a = p_g = 10$, $p^{(1)} = 25$. Son système canonique est le système de ses sections hyperplanes. Les surfaces F_0 appartenant à V_3^{24} sont des surfaces de Humbert généralisées, de genres $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 4$.

Dans le cas $n = 4$, on a $P_g = 11$ et la variété V_3^{32} a comme système canonique celui de ses sections hyperplanes.

Lorsque $n \geqq 5$, on trouve pour P_g un nombre inférieur à celui des variétés V_g^{n-3} de S_{10} linéairement indépendantes. Ainsi, pour $n = 5$, on trouve $P_g = 42$, alors qu'il existe 65 hyperquadriques linéairement indépendantes dans S_{10}.

6. Nous allons maintenant considérer une variété V_3^{24}, obtenue en faisant $n = 3$, transformée en elle-même par une homographie cyclique de période trois, de S_{10}; cette homographie déterminera sur V_3^{24} une involution I_3, d'ordre trois, dont nous étudierons la variété image.

Considérons dans S_3 l'homographie de période trois

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^2 x_4,$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité. Nous lui ferons correspondre, dans S_{10}, l'homographie H d'équations

$$\text{(H)} \qquad \frac{X'_0}{\varepsilon^k X^0} = \frac{X'_{11}}{X_{11}} = \frac{X'_{22}}{X_{22}} = \frac{X'_{12}}{X_{12}} = \frac{X'_{34}}{X_{34}}$$
$$= \frac{X'_{44}}{\varepsilon X_{44}} = \frac{X'_{13}}{\varepsilon X_{13}} = \frac{X'_{23}}{\varepsilon X_{23}} = \frac{X'_{33}}{\varepsilon^2 X_{33}} = \frac{X'_{14}}{\varepsilon^2 X_{14}} = \frac{X'_{24}}{\varepsilon^2 X_{24}},$$

où $k = 0, 1, 2$. On voit immédiatement que les hypothèses $k = 1$, $k = 2$ se ramènent l'une à l'autre par un changement de notations, il nous suffira donc d'étudier les cas $k = 0$, $k = 1$.

L'homographie H transforme en lui-même le cône V_4^8; pour obtenir une variété V_3^{24} invariante pour H, il nous suffira donc de prendre une hypersurface V_9^3 transformée en elle-même par H.

7. Commençons par supposer $k = 0$. L'hypersurface V_9^3 la plus générale transformée en elle-même par H a pour équation

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad & f_3(X_0, X_{11}, X_{22}, X_{12}, X_{34}) \\
& + X_0(a_1 X_{33} X_{13} + a_2 X_{33} X_{23} + a_3 X_{44} X_{14} + a_4 X_{44} X_{24}) \\
& \qquad + \varphi_3(X_{33}, X_{14}, X_{24}) + \psi_3(X_{44}, X_{13}, X_{23}) = 0,
\end{aligned}
$$

où f_3, φ_3 ψ_3 sont des formes cubiques les plus générales possibles. (En écrivant cette équation, nous avons évidemment tenu compte des équations du cône V_4^8.)

Désignons par O_{ik} le point de S_{10} dont toutes les coordonnées sont nulles sauf X_{ik}. Les axes ponctuels de l'homographie H($k = 0$) sont un espace à quatre dimensions

$$\alpha_1 = O_0 O_{11} O_{22} O_{12} O_{34},$$

et deux plans

$$\alpha_2 = O_{44}\, O_{13} O_{23}, \qquad \alpha_3 = O_{33} O_{14} O_{24}.$$

Il est facile de voir que les plans α_2, α_3 ne rencontrent pas la variété V_3^{24} intersection du cône V_4^8 et de l'hypersurface (1); par contre, l'espace α_1 coupe cette variété suivant une courbe Δ d'équations

$$X_{11} X_{22} - X_{12}^2 = 0, \qquad f_3(X_{00}, X_{11}, X_{22}, X_{12}, 0) = 0, \qquad X_{34} = 0,$$
$$X_{44} = X_{13} = X_{23} = X_{33} = X_{14} = X_{25} = 0,$$

c'est-à-dire suivant une courbe du sixième ordre et de genre quatre (courbe C.)

On en conclut que l'homographie H détermine, sur la variété V_3^{24}, une involution cyclique I_3, d'ordre trois, possédant la courbe unie Δ.

8. L'espace à trois dimensions σ, tangent à la variété V_3^{24} en un point de la courbe Δ, est uni pour l'homographie H. Celle-ci détermine dans cet espace une homographie h dont les points unis appartiennent aux axes ponctuels de H. L'espace σ contient la tan-

gente à la courbe Δ en son point de contact avec V_3^{24} ; cette tangente appartient à l'espace α_1 et est un axe ponctuel de h.

Désignons par $y_0, y_{11}, y_{22}, y_{12}$ les coordonnées non nulles d'un point de la courbe Δ. L'espace à trois dimensions tangent à V_3^{24} en ce point a pour équations

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} X_{11}Y_{22} + X_{22}Y_{11} - 2X_{12}Y_{12} = 0, \qquad X_{33} = 0, \qquad X_{44} = 0, \qquad X_{34} = 0, \\ X_{23}Y_{12} - X_{13}Y_{12} = 0, \qquad X_{24}Y_{11} - X_{14}Y_{12} = 0, \\ X_0 \dfrac{\partial f_3}{\partial Y_0} + X_{11} \dfrac{\partial f_3}{\partial Y_{11}} + X_{22} \dfrac{\partial f_3}{\partial Y_{22}} + X_{12} \dfrac{\partial f_3}{\partial Y_{12}} = 0. \end{array} \right.$$

Cet espace coupe le plan α_2 au point

$$X_{44} = 0, \qquad X_{23}Y_{11} - X_{12}Y_{12} = 0,$$

le plan α_3 au point

$$X_{33} = 0, \qquad X_{24}Y_{16} - X_{14}Y_{12} = 0,$$

et enfin l'espace α_1 suivant la droite réprésentée par la première et la dernière des équations (2), jointes à $X_{34} = 0$, c'est-à-dire suivant la tangente à la courbe Δ au point considéré.

Dans l'espace tangent (2), l'homographie H détermine donc une homographie h ayant deux points unis (dans α_2, α_3) et une droite de points unis (dans α_1). Par le point considéré de la courbe Δ, il passe donc une tangente unie à V_3^{24} s'appuyant sur α_2 et une tangente unie s'appuyant sur le plan α_3.

9. Il existe trois systèmes linéaires d'hyperplans de S_{10} unis pour l'homographie H ; ils ont pour équations

$$(3)\qquad \lambda_0 X_0 + \lambda_{11} X_{11} + \lambda_{22} X_{22} + \lambda_{12} X_{12} + \lambda_{34} X_{34} = 0,$$

$$(4)\qquad \lambda_{44} X_{44} + \lambda_{13} X_{13} + \lambda_{23} X_{23} = 0,$$

$$(5)\qquad \lambda_{33} X_{33} + \lambda_{14} X_{14} + \lambda_{24} X_{24} = 0.$$

Nous désignerons respectivement par $|F_1|$, $|F_2|$, $|F_3|$ les systèmes linéaires de surfaces F qu'ils découpent sur la variété V_3^{24}.

Soient Ω une variété image de l'involution I_3, $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, $|\Phi_3|$ les systèmes linéaires de surfaces qui correspondent, sur cette variété, respectivement aux systèmes $|F_1|$, $|F_2|$, $|F_3|$.

Considérons une surface $\overline{F_1}$ de $|F_1|$ et soit $\overline{\Phi_1}$ la surface correspondante sur Ω.

Les hyperplans (3) contiennent les plans α_2, α_3 et coupent la courbe Δ en six points ; par conséquent les groupes de l'involution I_3 appartenant à la surface $\overline{F_1}$ forment sur celle-ci une involution cyclique possédant six points unis. D'après ce que nous venons d'établir, en chacun de ces points le plan tangent à la surface $\overline{F_1}$ s'appuie en un point sur chacun des plans α_2, α_3. Les six points unis sont donc des points unis non parfaits (1).

Le système canonique de la surface $\overline{F_1}$ est découpé par les surfaces F, et il contient trois systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_3 : ce sont les systèmes $|(\overline{F_1}, F_1)|$, $|(\overline{F_1}, F_2)|$, $|(\overline{F_1}, F_3)|$. L'un de ces systèmes est le transformé du système canonique de la surface $\overline{\Phi_1}$ et il résulte de nos recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique que c'est le système dépourvu de point-base, c'est-à-dire le système $|(\overline{F_1}, F_1)|$.

On en conclut que sur la surface $\overline{\Phi_1}$, le système canonique est découpé par le système $|\Phi_1|$. En d'autres termes, le système $|\Phi_1|$ est son propre adjoint et la variété Ω possède une surface canonique et des surfaces pluricanoniques d'ordre zéro ($P_g = P_2 = \ldots = 1$).

La variété Ω possède des surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro, et sur cette variété, chaque système linéaire de surface est son propre adjoint.

Les surfaces Φ_1 ont les genres $p_a = p_g = 4$, $p^{(1)} = q$.

10. Considérons maintenant le réseau $|F_2|$. Les hyperplans (4) contiennent le plan α_3 et l'espace α_1, par conséquent, le système $|F_2|$ a comme courbe-base la courbe Δ. De plus, comme en chaque point de Δ il y a une tangente à la variété V_3^{24} s'appuyant sur le plan α_3, les surfaces F_2 se raccordent le long de la courbe Δ.

On sait que sur une surface Φ_1, les courbes découpées par les surfaces Φ_2 ont une tangente fixe en chacun des points de rencontre de Φ_1 avec la courbe Δ' homologue, sur Ω, de la courbe Δ. Par conséquent, les surfaces Φ_2 se raccordent le long de la courbe Δ'.

---

(1) *Recherches sur les involutions données d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique* [(*Bulletin de la Soc. math de France*, 1919, p. 1-16), *Les involutions cycliques.... (loc. cit.)*].

Dans la correspondance (1, 3) existant entre une surface Φ_2 et la surface homologue F_2, il y a une courbe unie Δ et la transformée d'une courbe canonique de Φ_2, augmentée de la courbe unie Δ comptée deux fois, donne une courbe canonique de F_2. Il en résulte que le système canonique d'une surface Φ_2 est découpé sur celle-ci par les autres surfaces du système $|\Phi_2|$, en dehors de la courbe Δ' comptée deux fois. On retrouve donc à nouveau que $|\Phi_2|$ est son propre adjoint.

Les surfaces Φ_2 ont les genres $p_a = p_g = 2$, $p^{(1)} = 4$.

On parvient de même à des conclusions analogues pour les surfaces Φ_3.

11. Pour obtenir un modèle projectif normal de la variété Ω, nous pouvons rapporter projectivement aux hyperplans d'un espace linéaire à quatre dimensions les hyperplans (3). Mais on obtient ainsi une variété quadruple, ayant comme support le cône

$$X_{12}^2 - X_{11} X_{22} = 0.$$

Nous pourrons obtenir une image normale simple de la variété Ω en partant du système linéaire complet formé par les hyperquadriques de S_{10} transformées en elles-mêmes par H et ne contenant pas l'espace α_1 (mais contenant nécessairement les plans α_2, α_3). Désignons par $|\mathcal{G}_0|$ le système des surfaces découpées sur V_3^{24} par ces hyperquadriques. Le système $|\mathcal{G}_0|$ contient les surfaces $2F_1$ et $F_2 + F_3$. En formant l'équation des hyperquadriques en question et en tenant compte des équations du cône V_4^8, on trouve facilement que le système $|\mathcal{G}_0|$ a la dimension dix-sept.

En rapportant projectivement les surfaces $\mathcal{G}_0$ aux hyperplans d'un espace linéaire S_{17} à dix-sept dimensions, on obtient une variété Ω', modèle projectif de Ω, d'ordre soixante-quatre, dont on formerait aisément les équations.

Les surfaces $\mathcal{G}_0$ ont les genres $p_a = p_g = 45$, $p^{(1)} = 193$; elles coupent la courbe Δ en douze points. On en déduit que les sections hyperplanes de Ω' sont de genres $p_a = p_g = 17$, $p^{(1)} = 65$.

A la courbe Δ correspond, sur la variété Ω', une courbe Δ'_1 d'ordre douze. Une section hyperplane de Ω' coupe Δ'_1 en douze points qui sont les points doubles biplanaires ordinaires de cette surface. Par conséquent, la courbe Δ'_1 est double pour la variété Ω' et en un point de cette courbe, le cône (à trois dimensions) tangent à la variété est formé de deux hyperplans.

12. Nous allons maintenant passer à l'étude du cas où, dans les équations de l'homographie H, nous avons $k = 1$. Nous considérerons la variété V_3^{24} intersection du cône V_4^8 et de l'hypersurface

$$(1)\ f_3(X_0, X_{44}, X_{13}, X_{23}) \\ + X_0(a_1 X_{11} X_{14} + a_2 X_{11} X_{24} + a_3 X_{22} X_{14} + a_4 X_{22} X_{24} + a_5 X_{33} X_{34}) \\ + \varphi_3(X_{11}, X_{22}, X_{12}, X_{34}) + \psi_3(X_{33}, X_{14}, X_{24}) = 0,$$

où f_3, φ_3, ψ_3 sont des formes algébriques cubiques.

L'homographie H possède trois axes ponctuels : deux espaces à trois dimensions

$$\alpha_1 = O_{11} O_{22} O_{12} O_{34}, \qquad \alpha_2 = O_0 O_{44} O_{13} O_{23},$$

et un plan

$$\alpha_3 = O_{33} O_{14} O_{24}.$$

L'espace α_1 coupe la variété V_3^{24} en six points donnés par

$$X_{11} X_{22} - X_{12}^2 = 0, \qquad \varphi_3(X_{11}, X_{22}, X_{12}, 0) = 0, \qquad X_{34} = 0,$$
$$X_0 = X_{33} = X_{44} = X_{13} = X_{23} = X_{14} = X_{24} = 0,$$

Nous désignerons ces points par $A_1, A_2, \ldots, A_6$.

L'espace α_2 coupe la variété V_3^{24} en trois points

$$X_{13} = X_{23} = 0, \qquad f_3(X_0, X_{44}, 0, 0) = 0,$$
$$X_{11} = X_{22} = X_{12} = X_{34} = X_{33} = X_{14} = X_{24} = 0,$$

situés sur la droite $O_0 O_{44}$ et que nous désignerons par B_1, B_2, B_3.

Le plan α_3 ne rencontre pas la variété V_3^{24}.

Sur la variété V_3^{24}, l'homographie H détermine donc une involution I_3, d'ordre trois, possédant neuf points unis

$$A_1, A_2, \ldots, A_6, B_1, B_2, B_3.$$

Nous désignerons par Ω_1 une variété image de cette involution.

13. Désignons par Y_{11}, Y_{22}, Y_{12} les coordonnées non nulles d'un des points $A_1, A_2, \ldots, A_6$. L'espace à trois dimensions tangent en ce point à la variété V_3^{24} a pour équations

$$(2)\quad \begin{cases} X_{11}Y_{22}+X_{22}Y_{11}-2X_{12}Y_{12}=0, \qquad X_{33}=X_{44}=X_{34}=0, \\ X_{13}Y_{12}-X_{23}Y_{11}=0, \qquad X_{14}Y_{12}-X_{24}Y_{11}=0, \\ X_{11}\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial Y_{11}}+X_{22}\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial Y_{22}}+X_{12}\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial Y_{12}}=0. \end{cases}$$

Cet espace est transformé en lui-même par H; il rencontre l'espace α_1 au seul point A considéré, l'espace α_2 suivant une droite et le plan α_3 suivant un point. Dans l'espace (2), H détermine donc une homographie ayant deux points unis et une droite de points unis.

En un point A_i, il existe donc un plan, α'_i, tangent à la variété V_3^{24} et rencontrant l'espace α_2 en une droite, et une tangente a_i à V_3^{24} s'appuyant sur le plan α_3.

14. Considérons maintenant un des points B_1, B_2, B_3 et soient Y_0, Y_{44} ses coordonnées non nulles. L'espace à trois dimensions tangent à la variété V_3^{24} en ce point a pour équations

$$(3)\quad \begin{cases} X_{11}=X_{22}=X_{33}=X_{12}=X_{13}=X_{23}=0, \\ X_0\dfrac{\partial f_3}{\partial Y_0}+X_{44}\dfrac{\partial f_3}{\partial Y_{44}}=0. \end{cases}$$

Cet espace rencontre α_2 en un seul point, l'espace α_1 en un seul point O_{34} et le plan α_3 suivant une droite $X_{33}=0$. L'espace (3) est transformé en lui-même par H et cette homographie détermine, dans cet espace, une homographie ayant deux points unis et une droite lieu de points unis.

Nous désignerons par β_i le plan tangent à V_3^{24} au point B_i, s'appuyant suivant une droite au plan α_2, et par b_i la tangente au même point à V_3^{24} rencontrant l'espace α_1.

Dans un travail antérieur [1], nous avons étudié les points unis isolés des involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions; les neuf points $A_1, A_2, \ldots, A_6, B_1, B_2, B_3$ sont du premier type étudié dans ce travail.

---

[1] *Sur les involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions* (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1931, p. 29-39).

15. Les trois systèmes linéaires d'hyperplans unis pour l'homographie H ont pour équations

$$\lambda_{11}X_{11}+\lambda_{22}X_{22}+\lambda_{12}X_{12}+\lambda_{34}X_{34}=0, \tag{4}$$

$$\lambda_{0}X_{0}+\lambda_{44}X_{44}+\lambda_{13}X_{13}+\lambda_{23}X_{23}=0, \tag{5}$$

$$\lambda_{33}X_{33}+\lambda_{14}X_{14}+\lambda_{24}X_{24}=0. \tag{6}$$

Désignons par $|F_1|$, $|F_2|$, $|F_3|$ les systèmes linéaires partiels de surfaces F découpés sur la variété V_3^{24} par les systèmes d'hyperplans précédents, par $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, $|\Phi_3|$ les systèmes linéaires de surfaces qui leur correspondent sur la variété Ω_1.

Considérons une surface $\overline{F}_1$ de $|F_1|$ et la surface homologue $\overline{\Phi}_1$. Les hyperplans (4) passent par les espaces α_2, α_3 et, par suite, $\overline{F}_1$ contient les points B_1, B_2, B_3. De plus, en ces points, elle touche respectivement les plans β_1, β_2, β_3. Sur $\overline{F}_1$, l'involution I_3 détermine donc une involution cyclique d'ordre trois ayant trois points unis parfaits B_1, B_2, B_3.

Le système canonique de F_1 est découpé par les surfaces F. Dans ce système, il y a trois systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_3; ce sont les systèmes $|(\overline{F}_1, F_1)|$, $|(\overline{F}_1, F_2)|$, $|(\overline{F}_1, F_3)|$. L'un de ces systèmes est le transformé du système canonique de $\overline{\Phi}_1$ et nous avons établi que ce système a pour points-base simples B_1, B_2, B_3.

Les courbes $(\overline{F}_1, F_2)$ ont des points doubles (à tangentes variables) en B_1, B_2, B_3. Les courbes $(\overline{F}_1, F_2)$ ne passent pas par ces points. Les courbes $(\overline{F}_1, F_3)$ passent simplement par ces points. Il en résulte que le système canonique de $\overline{\Phi}_1$ est découpé sur cette surface par les surfaces Φ_3. On a donc

$$|\Phi'_1| = |\Phi_3|.$$

$|\Phi_3|$ étant un réseau, les surfaces Φ_1 doivent avoir les genres $p_a = p_g = 3$. Nous avons établi qu'entre les genres p_a, $p^{(1)}$ d'une surface et ceux, π_a, $\pi^{(1)}$, d'une image d'une involution cyclique d'ordre trois possédant τ_1 points unis parfaits et τ_2 points unis non parfaits, appartenant à la première surface, ont lieu les relations

$$3(p_a+1)=9(\pi_a+1)-\tau_1-2\tau_2, \qquad p^{(1)}-1=3(\pi^{(1)}-1)+\tau_1 \tag{7}$$

En appliquant ces formules au cas actuel, on a $p_a = 10$,

$p^{(1)} = 25, \tau_1 = 3, \tau_2 = 0$, et l'on en déduit $\pi_a = 3, \pi^{(1)} = 8$. Le premier résultat confirme ce que nous venons d'obtenir.

16. Passons à l'examen d'une surface $\overline{F}_2$ de $|F_2|$; soit $\overline{\Phi}_2$ la surface homologue.

Les hyperplans (5) contiennent les espaces α_1, α_3 et par conséquent $\overline{F}_2$ passe par les points $A_1, A_2, \ldots, A_6$. En un de ces points, le plan tangent à la surface $\overline{F}_2$ s'appuie en un point sur α_1 et en un point sur α_3. Sur $\overline{F}_2$, nous avons donc une involution cyclique d'ordre trois possédant dix points unis non parfaits. Le transformé du système canonique de $\overline{\Phi}_2$ est composé au moyen de I_3 et n'a pas pour points-base les points $A_1, A_2, \ldots, A_6$; ce ne peut donc être que le système $|(\overline{F}_2, F_1)|$, car les surfaces F_2, F_3 passent par $A_1, A_2, \ldots, A_6$. On en conclut que l'adjoint de $\overline{\Phi}_2$ est le système $|\Phi_1|$, et l'on a

$$|\Phi'_2| = |\Phi_1|.$$

Les surfaces Φ_2 doivent donc avoir les genres $p_a = p_g = 4$, puisque $|\Phi_1|$ est ∞^3.

C'est ce qu'on retrouve en appliquant les relations (7) à la correspondance entre $\overline{F}_2$ et $\overline{\Phi}_2$. On a $p_a = 10$, $p^{(1)} = 25$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 6$, d'où $\pi_a = 4$, $\pi^{(1)} = 9$.

17. Les hyperplans (6) contiennent les espaces α_1, α_2; elles passent donc par les points $A_1, A_2, \ldots, A_6, B_1, B_2, B_3$. En un point A_i, une surface F_3 touche le plan α'_i et en un point B_i, le plan tangent à une surface F_3 s'appuie en un point sur α_1 et en un point sur α_3. Il en résulte que, sur une surface F_3, nous aurons une involution cyclique d'ordre trois possédant six points unis parfaits $A_1, A_2, \ldots, A_6$ et trois points unis non parfaits B_1, B_2, B_3.

Au système canonique d'une surface Φ_3 correspond, sur la surface F_3 homologue, un système de courbes canoniques passant simplement par les points $A_1, A_2, \ldots, A_6$, mais ne passant pas par les points B_1, B_2, B_3. On en conclut que l'adjoint de $|\Phi_3|$ est le système $|\Phi_2|$

$$|\Phi'_3| = |\Phi_2|.$$

Comme $|\Phi_2|$ est ∞^3, les surfaces Φ_3 ont les genres $p_a = p_g = 4$.

C'est ce qu'on retrouve en utilisant les formules (7). On a $p_a = 10$, $p^{(1)} = 25$, $\tau_1 = 6$, $\tau_2 = 3$, d'où $\pi_a = 4$, $\pi^{(1)} = 7$.

18. Sur la variété Ω_1, nous avons trois systèmes linéaires de surfaces $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, $|\Phi_3|$ tels que

$$|\Phi'_1| = |\Phi_3|, \qquad |\Phi'_2| = |\Phi_1|, \qquad |\Phi'_3| = |\Phi_2|.$$

Aucun de ces trois systèmes ne contient partiellement un des deux autres, donc la variété Ω_1 est dépourvue de surface canonique.

Des relations précédentes, on tire

$$|\Phi''_1| = |\Phi_2|, \qquad |\Phi''_2| = |\Phi_3|, \qquad |\Phi''_3| = |\Phi_2|,$$

donc la variété Ω_1 est dépourvue de surface bicanonique.

On a enfin

$$|\Phi'''_1| = |\Phi_1|, \qquad |\Phi'''_2| = |\Phi_2|, \qquad |\Phi'''_3| = |\Phi_3|,$$

et la variété Ω_1 possède une surface tricanonique d'ordre zéro.

D'une manière générale, *la variété* Ω_1 *possède des surfaces bicanoniques d'ordre zéro; les autres surfaces canonique ou pluricanoniques n'existent pas.*

Tout système linéaire de surfaces appartenant à Ω_1 est distinct de son adjoint et de son biadjoint et n'appartient à aucun de ces systèmes; il coïncide avec son triadjoint.

(Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*,
2e série, t. LXI, mars 1937.)