SUR L'EXISTENCE D'INVOLUTIONS RATIONNELLES, N'AYANT QU'UN NOMBRE FINI DE POINTS UNIS, APPARTENANT A UNE SURFACE ALGÉBRIQUE ;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

G. Humbert (1) et après lui M. L. Remy (2) ont étudié la surface qui représente les couples de points d'une courbe de genre trois, un point de la surface correspondant à deux couples de points de la courbe, forment un groupe canonique. A une transformation birationnelle de la courbe de genre trois en elle-même correspond une transformation birationnelle de la surface de Humbert en elle-même, engendrant une involution. En particulier, la quartique de Klein donne naissance à une surface de Humbert contenant une involution cyclique d'ordre sept, ayant trois points unis.

On peut prendre, pour modèle projectif de la surface de Humbert, une surface d'ordre douze, de l'espace S_6 à six dimensions, à sections hyperplanes bicanoniques, possédant vingt-huit points doubles coniques (3). Nous avons montré que cette surface est l'intersection d'un cône projetant une surface de Véronèse et d'une hypersurface cubique (4). En nous basant sur ce résultat, nous avons pu former l'équation d'une surface image de l'involution d'ordre sept dont il vient d'être question et constater que cette sur-

(1) *Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois* (*Journal de Liouville*, 1896, p. 263-293).

(2) *Sur certaines surfaces algébriques...* (*Journal de Liouville*, 1908) ; *Sur une classe de surfaces algébriques...* (*Ann. Ec. Norm. sup.*, 1909).

(3) *Sur une surface algébrique considérée par G. Humbert* (*Bull. des Sc. math.*, 1921, p. 14-20).

(4) *Sur une involution rationnelle, douée de trois points de coïncidence, appartenant à une surface de genre trois* (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1921, p. 653-665, 694-702). *Voir* aussi notre Note, *Sur une famille de surfaces algébriques de l'espace à six dimensions* (*Bull. de la Soc. math. de France*, 1924, p. 484-503).

face est rationnelle. Il importait de déterminer les raisons de ce fait, c'est l'objet de cette Note.

Ayant repris récemment l'étude des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique ([1]), nous avons particulièrement étudié ceux qui présentent les caractéristiques suivantes :

a. Parmi les tangentes à la surface au point uni considéré, deux seulement sont unies par l'involution (point uni non parfait);

b. A une courbe tracée sur la surface et touchant au point uni l'une de ces tangentes, l'involution fait correspondre des courbes osculatrices à la première en ce point.

Considérant alors une surface de S_6, intersection d'un cône projetant une surface de Véronèse et d'une hypersurface cubique, contenant une involution cyclique d'ordre sept, présentant trois points unis, nous montrons que ces points sont du type dont il vient d'être question. Nous faisons voir alors que les courbes canoniques et bicanoniques ne peuvent exister sur une surface image de l'involution. Cette surface étant régulière est par suite rationnelle.

1. Soient F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p d'ordre premier $p (p > 2)$ n'ayant qu'un nombre fini de points unis, Φ une surface normale image de cette involution, sur laquelle les points de diramation sont isolés. Aux sections hyperplanes Γ de Φ correspondent, sur F, des courbes C formant un système linéaire $|C|$ (en général incomplet) composé au moyen de I_p, n'ayant pas pour points-base des points unis de cette involution.

Désignons par n l'ordre de la surface Φ, par π le genre de ses sections hyperplanes Γ, par r la dimension de l'espace linéaire S_r qui la contient. Nous supposerons r suffisamment grand pour que les opérations qui vont être effectuées soient possibles, nous avons montré que cela n'était pas une restriction. Le système $|C|$ a le degré pn et le genre $p\pi - p + 1$.

([1]) *Sur les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*C. R. Acad. Sc.*, 1er semestre, 1930, p. 154-155); *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1930, p. 450-467).

Considérons un point uni A non parfait de I_p et désignons par C_1 les courbes C passant par A ; elles forment un système linéaire $|C_1|$ et ont en A une certaine multiplicité et deux tangentes distinctes t_1, t_2. Appelons C_2 les courbes C_1 assujetties à toucher, en A, une droite (tangente à F) distincte de t_1, t_2. Les courbes C_2 forment un système linéaire $|C_2|$, de dimension $r-2$, ayant en A soit la multiplicité p et p tangentes variables ; soit une multiplicité inférieure à p et deux tangentes distinctes t_1, t_2. Si le second cas se présente, appelons C_3 les courbes C_2 assujetties à toucher en A une droite distincte de t_1, t_2, et ainsi de suite. Nous formons ainsi une suite de systèmes linéaires

$$|C_1|, \quad |C_2|, \quad |C_3|, \quad \ldots, \quad |C_{\nu-1}|, \quad |C_\nu|$$

ayant en A des multiplicités croissantes et, sauf le dernier, deux tangentes distinctes t_1, t_2 en ce point. Le système $|C_\nu|$ a la multiplicité p en A et des tangentes variables en ce point. Le système $|C_i|$ a la dimension $r-i$.

En rapportant projectivement les courbes C_1 aux hyperplans d'un espace linéaire S_{r-1} à $r-1$ dimensions, on obtient une surface Φ_1, projectivement identique à la projection de Φ à partir du point de diramation A' homologue de A, sur un hyperplan de S_r ne passant pas par A'. D'une manière générale, en rapportant projectivement les courbes C_i aux hyperplans d'un espace S_{r-i}, on obtient une surface Φ_i projectivement identique à la projection d'une surface Φ_{i-1} à partir d'un de ses points A'_{i-1} sur un espace S_{r-i}. En faisant successivement $i = 2, 3, \ldots, \nu$, on obtient une suite de surfaces $\Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_\nu$, images de l'involution I_p.

2. Supposons que le point infiniment voisin de A, sur la tangente t_1, soit uni parfait pour l'involution I_p. En d'autres termes, supposons que la transformation birationnelle T de F en elle-même, génératrice de I_p, fasse correspondre à une courbe tracée sur F, tangente à t_1 en A, une courbe osculatrice à la première en A.

Posons $p = 2m+1$. Nous avons montré que la surface Φ possède en A' la multiplicité $m+1$, le cône tangent à la surface en ce point étant formé d'un cône d'ordre m et d'un plan contenant une seule génératrice du cône précédent. La surface Φ_1 a donc l'ordre $n-m-1$. On a $\nu = m+1$ et les surfaces $\Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_\nu$ ont les ordres respectifs $n-m-2$, $n-m-3$, ..., $n-2m-1=n-p$.

Les courbes C_1 ont en A la multiplicité $m+1$; m de leurs tangentes en ce point coïncident avec t_1, une avec t_2. Sur chaque courbe C_1, le point A est l'origine de $m+1$ branches; l'une de ces branches, tangente à t_2, contient m points infiniment voisins successifs de A, communs à toutes les courbes C_1.

Au domaine du point A', sur la surface Φ, correspond, sur la surface Φ_1, une courbe rationnelle normale γ_1, d'ordre m et une droite γ_2, coupant γ_1 au point A'_1. La courbe γ_1 correspond au domaine du point de F, infiniment voisin de A sur t_1. La droite γ_2 correspond au domaine du dernier point commun à toutes les courbes C_1, situé sur les branches de ces courbes tangentes à t_2.

Dans le passage de la surface Φ_1 à la surface Φ_2, il correspond à la courbe γ_1, une courbe rationnelle normale γ'_1, d'ordre $m-1$, et au point A'_1, une droite exceptionnelle rencontrant γ'_1 au point A'_2. En continuant de même l'examen des passages de Φ_2 à Φ_3, de Φ_3 à Φ_4, . . . , de $\Phi_{\nu-2}$ à $\Phi_{\nu-1}$, on trouve sur cette dernière surface deux droites se coupant au point $A'_{\nu-1}$. L'une de ces droite $\gamma_1^{(\nu-2)}$ correspond à la courbe γ_1 ; l'autre droite est exceptionnelle et correspond au point $A'_{\nu-2}$.

Aux courbes C_ν correspondent, sur $\Phi_{\nu-1}$, les sections de cette surface par les hyperplans passant par $A'_{\nu-1}$. Ce point est simple pour $\Phi_{\nu-1}$. Parmi les courbes C_ν se trouvent les courbes ayant leurs p tangentes en A confondues avec t_1 ; à ces courbes correspondent, sur $\Phi_{\nu-1}$, les courbes de degré $n-2p$, sections de la surface par les hyperplans passant par $\gamma_1^{\nu-2}$; ces courbes rencontrent cette droite en p points variables. Tenant compte du fait que $\Phi_{\nu-1}$ a l'ordre $n-2m$, on en conclut que la droite $\gamma_1^{\nu-2}$ a le degré $-p+1$. Par suite, la courbe rationnelle γ_1 a le degré $-(m+1)$. Un calcul simple montre que la droite γ_2 a le degré -2.

Il résulte de tout ceci que les courbes canoniques de la surface Φ_1, si elles existent, rencontrent la courbe γ_1 en $m-1$ points variables, mais ne rencontrent pas γ_2.

Étant donnée une involution cyclique d'ordre premier $p=2m+1$, *appartenant à une surface algébrique et n'ayant qu'un nombre fini de points unis, si un point uni non parfait de cette involution possède, dans son domaine du premier ordre, un point uni parfait, le point de diramation correspon-*

dant sur la surface image de l'involution est équivalent à deux courbes rationnelles, l'une de degré -2, *l'autre de degré* $-(m+1)$, *se coupant en un point. Les courbes canoniques éventuelles de la dernière de ces surfaces rencontrent la seconde de ces courbes en* $m-1$ *points variables.*

3. Considérons, dans l'espace linéaire S_6, la surface représentée par les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} x_2x_3 = x_4^2, & x_3x_1 = x_5^2, & x_1x_2 = x_6^2, \\ x_1x_4 = x_5x_6, & x_2x_5 = x_6x_4, & x_3x_6 = x_4x_5, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{aligned} &x_0^3 + x_0(a_1x_1x_5 + a_2x_2x_6 + a_3x_3x_4) \\ &\quad + b_1x_1^2x_6 + b_2x_2^2x_4 + b_3x_3^2x_5 + b_4x_1x_2x_3 = 0, \end{aligned}$$

transformée en elle-même par l'homographie de période sept

$$(3)\qquad \frac{x'_0}{x^0} = \frac{x'_1}{\varepsilon^2 x_1} = \frac{x'_2}{\varepsilon^4 x_2} = \frac{x'_3}{\varepsilon x_3} = \frac{x'_4}{\varepsilon^6 x_4} = \frac{x'_5}{\varepsilon^5 x_5} = \frac{x'_6}{\varepsilon^3 x_6},$$

où ε est une racine septième primitive de l'unité.

Appelons O_i le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf x_i. Les équations (1) représentent le cône V_3^4 projetant du point O_0 une surface de Véronèse située dans l'hyperplan $x_0 = 0$.

Sur la surface F représentée par les équations (1) et (2), d'ordre douze, l'homographie (3), détermine une involution I_7 d'ordre sept présentant les trois points unis O_1, O_2, O_3.

Le plan tangent à la surface F au point O_1 a pour équations

$$(4)\qquad x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = 0.$$

Dans ce plan, l'homographie (3) engendre une homographie que l'on peut représenter par

$$(5)\qquad x'_0 : x'_1 : x'_5 = \varepsilon^5 x_0 : x_1 : \varepsilon^3 x_5.$$

Pour cette dernière homographie, le point O_1 est uni non parfait et le point infiniment voisin de O_1 sur la droite O_1O_0 est uni parfait. Si nous projetons la surface F sur le plan (4) à partir de l'espace $O_2O_3O_4O_6$, aux courbes tracées sur F et passant par O_1, transformées en elles-mêmes par l'homographie (3), correspondront sur le plan des courbes passant par O_1 transformées en elles-mêmes par l'homographie (5). Par suite, sur la surface F, le point infiniment voisin de O_1 sur la tangente O_1O_0 à cette surface, est uni parfait pour l'involution I_7.

Soit Φ une surface image de l'involution I_7. Le point de diramation correspondant au point O_1 est équivalent à deux courbes rationnelles se rencontrant en un point. L'une de ces courbes, γ_{11}, est de degré -4; l'autre, γ_{12}, est de degré -2. La courbe γ_{11} correspond au domaine du point de F infiniment voisin de O_1 sur la droite O_1O_0.

On démontre de même que les points de F, infiniment voisins des points O_2, O_3, situés respectivement sur les droites O_2O_0, O_3O_0, sont unis parfaits pour I_7. Au point O_2 correspond, sur Φ, un point de diramation équivalent à une courbe rationnelle γ_{21}, de degré -4 et à une courbe rationnelle γ_{22}, de degré -2, rencontrant la première en un point. De même, au point O_3 correspond sur Φ deux courbes rationnelles γ_{31}, de degré -4, γ_{32}, de degré -2, se coupant en un point.

Les courbes canoniques éventuelles de la surface Φ doivent rencontrer en deux points chacune des courbes γ_{11}, γ_{21}, γ_{31}.

4. La surfaces F a les genres

$$p^{(1)} = 4, \qquad p_a = p_g = 3, \qquad P_2 = 7, \qquad \ldots .$$

Les courbes canoniques sont découpées sur F par les cônes projetant, de O_0, les coniques de la surface de Véronèse représentée, dans l'hyperplan $x_0 = 0$, par les équations (1). Ce sont des sextiques gauches de genre quatre; chacune de ces courbes appartient à un espace linéaire à trois dimensions.

Les courbes bicanoniques de F sont les sections hyperplanes de cette surface.

La surface Φ représentant une involution appartenant à une surface régulière F, est elle-même régulière. Nous allons démontrer que Φ est dépourvue de courbes canoniques.

Si la surface Φ possédait une courbe canonique, la transformée sur F de cette courbe serait une courbe canonique de cette surface, transformée en elle-même par l'homographie (3). Il existe trois courbes canoniques de F transformées en elles-mêmes par cette homographie. L'une de ces courbes est située dans l'espace à trois dimensions

$$(6)\qquad x_2 = x_4 = x_6 = 0,$$

et est l'intersection de cet espace et des hypersurfaces

$$x_3 x_1 - x_5^2 = 0, \qquad x_0^3 + a_1 x_0 x_1 x_5 + b_3 x_3^2 x_5 = 0.$$

L'espace (6) contient le plan tangent (4) à F au point O_1 et la courbe canonique envisagée, que nous désignerons par C'_1, possède un point double en O_1. Les tangentes en ce point sont les droites $O_1 O_0$ et $O_1 O_5$. La courbe C'_1 passe par O_3 en y touchant la droite $O_3 O_0$. La courbe Γ'_1, qui correspond sur Φ à la courbe C'_1, coupe donc γ_{11} en un point, γ_{12} en un point et γ_{31} en un point; cette courbe ne peut donc être une courbe canonique de Φ. En observant que la courbe C'_1, possédant un point double, est de genre trois et en appliquant la formule de Zeuthen, on voit d'ailleurs que la courbe Γ'_1 est rationnelle. Elle est nécessairement de degré -1 et exceptionnelle.

On arrive aux mêmes conclusions en considérant les autres courbes canoniques de F, transformées en elles-mêmes par l'homographie (3), situées respectivement dans les espaces linéaires à trois dimensions

$$x_3 = x_4 = x_5 = 0,$$

$$x_1 = x_5 = x_6 = 0.$$

La surface Φ a donc les genres arithmétique et géométrique nuls.

5. Nous montrerons maintenant que la surface Φ est dépourvue de courbe bicanonique. Une telle courbe devrait en effet rencontrer en quatre points chacune des courbes γ_{11}, γ_{21}, γ_{31} et aurait pour transformée, sur F, une courbe bicanonique de cette surface, passant par O_1, O_2, O_3 et transformée en elle-même par l'homographie (3). Les courbes bicanoniques de la surface F jouissant de ces propriétés sont découpées sur les hyperplans $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, $x_0 = 0$.

Il est facile de voir que chacun des hyperplans $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, coupe F suivant deux des courbes canoniques dont il vient d'être question; elles ne sauraient donc donner lieu, sur Φ, à des courbes bicanoniques de cette surface.

L'hyperplan $x_0 = 0$ coupe F suivant une courbe passant simplement par O_1, O_2, O_3 en y touchant respectivement les droites O_1O_5, O_2O_6, O_3O_5. Il lui correspond, sur la surface Φ, une courbe elliptique rencontrant en un point chacune des courbes γ_{12}, γ_{22}, γ_{32}, mais ne rencontrant pas les courbes γ_{11}, γ_{21}, γ_{31}. Ce ne peut donc être une courbe bicanonique de Φ.

La surface Φ a donc le bigenre nul; comme son genre arithmétique est également nul, elle est rationnelle, d'après le théorème de M. Castelnuovo.

Nous avons donc démontré *l'existence, sur une surface algébrique de genres $p^{(1)} = 4$, $p_a = p_g = 3$, $P_2 = 7$, d'une involution rationnelle ne présentant qu'un nombre fini de points unis.*

(Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, t. LVII, janvier 1933.)

95842. — Imp. Gauthier-Villars, 55, Quai des Grands-Augustins, 55, Paris.