EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*,
N° 2, 1933.

Note sur une surface algébrique de genres un,

par LUCIEN GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liége.

Dans un travail récent (1), nous avons rencontré un espace double dont les sections planes sont des plans doubles de genres zéro et de bigenre un et dont la surface de diramation est une surface de genres un. Dans cette note, nous montrons que cette dernière surface est l'image d'une involution du second ordre appartenant à une surface de genres un et qu'elle est, d'autre part, birationnellement identique à une quadrique double.

1. Soit F une surface algébrique du sixième ordre ayant une droite double r et deux droites doubles tacnodales s_1, s_2. Les droites s_1, s_2 s'appuient sur r en des points distincts et les tangentes tacnodales à F aux points de s_1 appartiennent au plan rs_1, les tangentes tacnodales aux points de s_2 appartenant au plan rs_2.

Les adjointes d'ordre deux à la surface F doivent passer par r, s_1, s_2 et toucher les plans rs_1 le long de s_1, rs_2 le long de s_2. Il existe donc une seule de ces adjointes, formée des plans rs_1, rs_2 Cette adjointe ne rencontre pas la surface F en dehors des droites doubles ; la courbe canonique de F est donc d'ordre zéro et tous les genres de cette surface sont égaux à l'unité ($p_a = P_4 = 1$).

Rapportons la surface F à un tétraèdre choisi de telle sorte que les droites r, s_1, s_2 aient respectivement pour équations

$$x_2 = x_3 = 0\,(r), \quad x_0 = x_3 = 0\,(s_1), \quad x_1 = x_2 = 0\,(s_2),$$

l'équation de la surface F s'écrivant

$$a_0 x_0^4 x_2^2 + a_1 x_1^4 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 \varphi_2(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0,$$

où φ_2 est le premier membre de l'équation d'une quadrique.

Les sections planes de la surface F étant de genre cinq, F est la projection d'une surface normale F′, d'ordre huit, de l'espace S_5,

(1) « Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genre zéro et de bigenre un » (*Bull. de l'Acad. roy. de Belg.*, février 1933).

à partir de deux de ses points. Pour obtenir la surface F′, observons que les surfaces cubiques passant par les droites r, s_1, s_2 en touchant le long de ces deux dernières droites respectivement les plans rs_1, rs_2, ont pour équation

$$x_2x_3(\lambda_0x_0+\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3)+\lambda_4x_0^2x_2+\lambda_5x_1^2x_3=0. \qquad (1)$$

Ces surfaces découpent, sur F, un système linéaire ∞^5, complet, de degré huit et de genre cinq, comprenant, pour $\lambda_4=\lambda_5=0$, le système des sections planes

Rapportons projectivement les surfaces (1) aux hyperplans d'un espace linéaire S_5 à cinq dimensions, en posant

$$\frac{X_0}{x_0x_2x_3}=\frac{X_1}{x_1x_2x_3}=\frac{X_2}{x_2^2x_3}=\frac{X_3}{x_2x_3^2}=\frac{X_4}{x_0^3x_2}=\frac{X_5}{x_1^2x_3}.$$

A la surface F correspond la surface F′ d'équations

$$a_0X_4^2+a_1X_5^2+\varphi_2(X_0,X_1,X_2,X_3)=0, \qquad (2)$$

$$X_0^2=X_3X_4, \qquad X_1^2=X_2X_5. \qquad (3)$$

La surface F est la projection de la surface F′ à partir de ses deux points de rencontre avec la droite

$$X_0=X_1=X_2=X_3=0.$$

2. La surface F′ est l'intersection de l'hyperquadrique (2) et de deux cônes quadratiques (3). Le premier de ces cônes a pour sommet le plan ϖ_1

$$X_0=X_3=X_4=0, \qquad (\varpi_1)$$

le second le plan ϖ_2

$$X_1=X_3=X_5=0. \qquad (\varpi_2)$$

Ces cônes sont donc formés chacun de ∞^1 espaces linéaires à trois dimensions.

Un hyperplan passant par ϖ_1 coupe le cône

$$X_0^2=X_3X_4 \qquad (4)$$

suivant deux espaces linéaires à trois dimensions. Chacun de ces espaces coupe l'hyperquadrique (2) et le cône

$$X_1^2=X_2X \qquad (5)$$

suivant une quartique elliptique. En particulier, les hyperplans

$$\lambda^2 X_3 + 2\lambda X_0 + X_4 = 0,$$

tangents au cône (4), touchent la surface F′ suivant des quartiques elliptiques Γ_1.

De même, les hyperplans

$$\mu^2 X_2 + 2\mu X_1 + X_5 = 0,$$

tangents au cône (5), touchent la surface F′ suivant des quartiques elliptiques Γ_2.

Le plan ϖ_1, double pour le cône (5) rencontre F′ en quatre points doubles coniques pour cette surface et par lesquels passent les courbes Γ_1. De même, le plan ϖ_2 coupe F′ suivant quatre points doubles coniques de cette surface, appartenant à toutes les courbes Γ_2.

Les courbes Γ_1 Γ_2 forment deux faisceaux $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ et deux courbes Γ_1, Γ_2 se rencontrent en deux points. Les courbes $\Gamma_1 + \Gamma_2$ forment un système linéaire $|\Gamma_1 + \Gamma_2|$ de genre trois, ∞^3. Les hyperquadriques

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0^2 X_4 X_5 + \lambda_1^2 X_2 X_4 + \lambda_2^2 X_3 X_5 + \lambda_3^2 X_2 X_3 + 2\lambda_0\lambda_1 X_1 X_4 + 2\lambda_0\lambda_2 X_0 X_5 \\ + 2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) X_0 X_1 + 2\lambda_1\lambda_3 X_0 X_2 + 2\lambda_2\lambda_3 X_1 X_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

touchent la surface F′ le long d'une courbe du système $|\Gamma_1 + \Gamma_2|$. Ces courbes passent par les huit points doubles coniques de F′ situés dans les plans ϖ_1, ϖ_2. Par suite, la surface F′ est l'image d'une involution d'ordre deux appartenant à une surface de genres un (¹).

3. Les ∞^2 couples de points de F′ communs aux courbes Γ_1, Γ_2 forment une involution I_2 possédant certainement une courbe unie et par suite rationnelle.

Aux courbes Γ_1, Γ_2 correspondent sur F les quartiques elliptiques découpées par les plans

$$x_0 + \lambda x_3 = 0, \qquad x_1 + \mu x_2 = 0.$$

Les couples de l'involution I_2 sont donc déterminés, sur la surface F, par les droites s'appuyant sur les droites s_1. s_2.

(¹) « Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un » (*Annales de l'École norm. sup.*, 1914, 1919).

Aux courbes du système $|\Gamma_1 + \Gamma_2|$ correspondent, sur F, les courbes découpées par les quadriques

$$\lambda\, x_0 x_1 + \lambda_1 x_0 x_2 + \lambda_2 x_1 x_3 + \lambda_3 x_2 x_3 = 0,$$

passant par les droites s_1, s_2.

Rapportons projectivement ces quadriques aux plans de l'espace en posant

$$\frac{y_1}{x_0\, x_1} = \frac{y_2}{x_0\, x_2} = \frac{y_3}{x_1\, x_3} = \frac{y_4}{x_2\, x_3}.$$

à la surface F correspond birationnellement une quadrique double de support

$$y_1 y_4 - y_2 y_3 = 0,$$

dont la courbe de diramation, du huitième ordre, est découpée par la surface

$$\begin{aligned} & y_4^2(a_{01} y_1 + a_{02} y_2 + a_{13} y_3 + a_{23} y_4)^2 \\ & - a_0 a_1 y_1^4 - a_0 y_2^2 (a_{11} y_1^2 + 2 a_{12} y_1 y_2 + a_{22} y_2^2) - a_1 y_3^2 (a_{00} y_1^2 + 2 a_{03} y_1 y_3 + a_{33} y_3^2) \\ & - y_4^2 [a_{00} a_{11} y_1^2 + 2 y_1 (a_{00} a_{12} y_2 + a_{11} a_{03} y_3) + 2 y_4 (a_{03} a_{22} y_2 + a_{12} a_{33} y_3) \\ & + a_{00} a_{22} y_2^2 + a_{11} a_{33} y_3^2 + 4 a_{03} a_{12} y_2 y_3 + a_{22} a_{33} y_4^2] = 0. \end{aligned}$$

On a posé

$$\varphi_2 \equiv a_{00}\, x_0^2 + a_{11}\, x_1^2 + \cdots + 2 a_{23}\, x_2\, x_3.$$

Liége, le 9 février 1933.

MARCEL HAYEZ, Imprimeur, 112, rue de Louvain, Bruxelles.