EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*
Séance du 18 mars 1937, n° 3.

Sur les surfaces algébriques dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques

(*première note*),

par LUCIEN GODEAUX, Professeur à l'Université de Liége.

Dans une note parue au début de 1914, M. Enriques, passant en revue la classification des surfaces algébriques, a appelé l'attention sur l'intérêt qu'il y aurait à construire des modèles projectifs canoniques des surfaces algébriques, c'est-à-dire des surfaces sur lesquelles le système canonique est constitué par le système des sections hyperplanes (1). Le problème de la détermination de ces surfaces ne semble pas devoir être résolu de si tôt; dans ces conditions, il nous a paru intéressant de signaler quelques solutions de ce problème, rencontrées au cours de nos recherches sur les surfaces et les variétés algébriques (2).

L'expression « surface canonique » est employée, en géométrie algébrique, dans deux sens différents : d'une part, elle peut désigner une surface du système canonique d'une variété algébrique à trois dimensions; d'autre part, une surface dont les sections hyperplanes constituent le système canonique. Pour éviter toute ambiguïté, nous appellerons surface canonique au sens projectif ou, en abrégé, *surface projectivement canonique*, une surface de cette dernière catégorie.

M. Enriques a donné deux procédés de constructions de surfaces projectivement canoniques (3) :

---

(1) Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare $p^{(1)}=1$ (*Rendiconti della R. Accad. dei Lincei*, 1° sem. 1914, pp. 206-214, 291-297). Voir également ENRIQUES-CAMPEDELLI, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*, Padova, 1932).

(2) Nous avons déjà eu l'occasion de signaler des surfaces projectivement canoniques dans nos travaux antérieurs, notamment dans les notes « Sur la construction d'une surface canonique » (*Bull. de la Soc. roy. des Sc. de Liége*, 1936, pp. 140-143), « Sur une surface canonique appartenant à la variété de Segre représentant les couples de points de deux plans » (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1936, pp. 1223-1225), « Sur une variété algébrique à trois dimensions de bigenre un » (*idem*, 1937, pp. 93-101).

De son côté, M. BURNIAT a également construit des surfaces projectivement canoniques dans les travaux suivants : « Sur une variété à trois dimensions associée à un tétraèdre » (*Bull. des Sciences mathématiques*, 1936, pp. 171-180); « Note sur quelques surfaces canoniques et sur des surfaces de genres un » (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1936, pp. 864-872); « Modèles projectifs de surfaces canoniques » (*idem*, 1937, pp. 130-134.)

(3) Lezioni... (*loc. cit.*).

I. *Les surfaces, intersections d'une hyperquadrique et d'une variété algébrique à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genres un, sont des surfaces projectivement canoniques.*

II. *Les surfaces, intersections d'une hypersurface cubique avec une variété algébrique normale, à trois dimensions, rationnelle, d'ordre* r, *dans un espace linéaire à* r + 1 *dimensions, sont des surfaces projectivement canoniques.*

Dans cette note, nous nous proposons d'établir les théorèmes suivants :

I. *L'intersection de la variété normale de Segre représentant les ternes de points de trois ponctuelles, et d'une hypersurface cubique, est une surface projectivement canonique.*

II. *L'intersection de deux hyperquadriques et du cône projetant d'un point la variété de Segre dont il vient d'être question est une surface projectivement canonique.*

Le premier théorème est une application du second de M. Enriques; nous en donnons cependant une démonstration indépendante, qui nous paraît intéressante en elle-même.

1. — Soient s_1, s_2, s_3 trois ponctuelles, x_1 et x_2, y_1 et y_2, z_1 et z_2 les coordonnées projectives homogènes de ces ponctuelles. Posons

$$\rho X_{ikl} = x_i y_k z_l \qquad (i, k, l = 1, 2), \tag{1}$$

et interprétons les X comme coordonnées projectives homogènes d'un point X de l'espace S_7. Le point X engendre la variété de Segre V_3^6, d'ordre six, normale dans l'espace S_7, représentant les ternes de points des ponctuelles s_1, s_2, s_3 [4]. Cette variété V_3^6 appartient à trois variétés V_4^4, à quatre dimensions, d'ordre quatre, d'équations respectives

$$\begin{Vmatrix} X_{111} & X_{121} & X_{112} & X_{122} \\ X_{211} & X_{221} & X_{212} & X_{222} \end{Vmatrix} = 0,$$

$$\begin{Vmatrix} X_{111} & X_{211} & X_{112} & X_{212} \\ X_{121} & X_{221} & X_{122} & X_{222} \end{Vmatrix} = 0,$$

$$\begin{Vmatrix} X_{111} & X_{211} & X_{121} & X_{221} \\ X_{112} & X_{212} & X_{122} & X_{222} \end{Vmatrix} = 0.$$

---

[4] C. Segre, Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi (*Rendiconti Circolo matematico di Palermo*, 1891).

On peut représenter la variété V_3^6 biunivoquement sur un espace linéaire à trois dimensions en la projetant sur cet espace à partir de l'espace à trois dimensions d'équations

$$X_{111} = X_{211} = X_{121} = X_{112} = 0.$$

Ce dernier espace coupe V_3^6 suivant trois droites passant par un même point.

Cette projection revient à poser [5]

$$x_1 = y_1 = z_1 = t, \quad x_2 = x, \quad y_2 = y, \quad z_2 = z.$$

A une section hyperplane de la variété V_3^6 correspond une surface cubique d'équation

$$t^3 + t^2(ax + by + cz) + t(a_1 yz + b_1 zx + c_1 xy) + a_0 xyz = 0.$$

Cette surface cubique a comme points doubles les points A(1, 0, 0, 0), B(0, 1, 0, 0), C(0, 0, 1, 0) et passe simplement par les droites $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

Réciproquement, à toute surface cubique possédant ces propriétés correspond une section hyperplane de la variété V_3^6.

2. — Désignons par F la surface intersection de la variété de Segre V_3^6 et d'une hypersurface cubique V_6^3, générale, de S_7.

A la surface F correspond, dans l'espace (x, y, z, t), une surface F′ du neuvième ordre, passant triplement par les droites a, b, c et ayant pour points sextuples les points A, B, C. L'équation de la surface F′ s'écrit d'ailleurs sous la forme

$$\begin{gathered} t^9 + t^8\varphi_1(x, y, z) + t^7\varphi_2(x, y, z) + t^6\varphi_3(x, y, z) \\ + t^5[A_{31} + B_{31} + A_{22} + xyz\,\varphi_1'(x, y, z)] + t^4[A_{32} + B_{32} + xyz\,\varphi_2'(x, y, z)] \\ + t^3[A_{33} + xyz(A_{21} + B_{21}) + ax^2y^2z^2] + t^2[xyz\,A_{22} + x^2y^2z^2\varphi_1''(x, y, z)] \\ + tx^2y^2z^2A_{11} + a_0x^3y^3z^3 = 0, \end{gathered}$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_1''$ sont des polynomes en x, y, z dont les degrés sont indiqués par les indices et où

$$A_{ik} = ax^iy^k + by^iz^k + cz^ix^k, \quad B_{ik} = a'x^iz^k + b'y^ix^k + c'z^iy^k.$$

Les adjointes de la surface F′ sont des surfaces d'ordre cinq passant doublement par les droites a, b, c et ayant pour points

---

(5) G. Scorza, Sulle varietà di Segre (*Atti della R. Accad. di Torino*, 1909-1910).

quadruples les points A, B, C. Ces surfaces comprennent deux fois le plan $t=0$ et sont complétées par les surfaces cubiques passant doublement par les points A, B, C et par suite simplement par les droites a, b, c. Ce sont précisément les surfaces correspondant aux sections hyperplanes de V_3^6. Par conséquent, la surface F est projectivement canonique.

La surface F *est régulière et a les genres* $p_a=p_g=8$, $p^{(1)}=19$.

3. — Les ternes de points des ponctuelles s_1, s_2, s_3 dont fait partie un point fixe x de la ponctuelle s_1 ont pour image sur V_3^6 les points d'une quadrique Q_1. Lorsque le point x décrit la ponctuelle s_1, la quadrique Q_1 engendre un faisceau $|Q_1|$, dépourvu de points-base. De même, en partant des ponctuelles s_2, s_3, ont obtient deux autres faisceaux de quadriques $|Q_2|$, $|Q_3|$, également dépourvus de points-base.

Deux quadriques Q_1, Q_2, par exemple, qui correspondent à des points fixes x, y de s_1, s_2, ont en commun la droite qui représente l'ensemble des ternes de points de s_1, s_2, s_3 contenant les points fixes x, y considérés.

Il existe des sections hyperplanes de V_3^6 formées de trois quadriques Q_1, Q_2, Q_3. Dans l'espace (t, x, y, z), il leur correspond des surfaces cubiques formées de trois plans passant respectivement par les droites a, b, c.

La variété V_6^3 coupe les quadriques Q_1, Q_2, Q_3 suivant des sextiques de genre quatre que nous désignerons respectivement par C_1, C_2, C_3. La surface F possède donc trois faisceaux linéaires $|C_1|$, $|C_2|$, $|C_3|$, de degré zéro, de courbes de genre quatre et le système canonique de cette surface est donné par

$$| C | = | C_1 + C_2 + C_3 |.$$

Deux courbes, prises dans deux faisceaux différents, se coupent en trois points.

Les courbes C_1, C_2, C_3 sont, comme on sait, des courbes projectivement canoniques, mais l'adjoint $|C'_1|$ du faisceau $|C_1|$, par exemple, est

$$| C'_1 | = | 2C_1 + C_2 + C_3 |.$$

4. — Considérons, dans un espace linéaire S_8, une variété V_4^6, à quatre dimensions, d'ordre six, dont les sections hyperplanes sont des variétés de Segre représentant les ternes de points de trois droites. D'après un théorème de M. Scorza [6], cette variété est un cône projetant d'un point O une variété de Segre V_3^6 d'un hyperplan de S_8.

La section du cône V_4^6 par une hypersurface cubique V_7^3 de S_8 est une variété à trois dimensions, V_3^{18}, dont les sections hyperplanes sont des surfaces F projectivement canoniques; par conséquent le système $|F|$ est son propre adjoint et la variété V_3^{18} possède une surface canonique et des surfaces pluricanoniques d'ordre zéro.

Tout système linéaire de surfaces tracées sur V_3^{18} est son propre adjoint.

Il existe sur la variété V_3^{18} trois faisceaux linéaires de surfaces $|F_1|$, $|F_2|$, $|F_3|$ dont les sections hyperplanes sont des courbes de genre quatre. Ces faisceaux sont dépourvus de points-base. Les surfaces F_1, F_2, F_3, qui sont intersections de cônes du second ordre à trois dimensions avec la variété V_7^3 sont de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Chacun des faisceaux $|F_1|$, $|F_2|$, $|F_3|$ est son propre adjoint.

5. — Retournons à l'espace S_7 primitif et observons que la section de la variété de Segre V_3^6 par une hyperquadrique V_6^2 est une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$). En effet, il correspond à cette surface, dans l'espace (t, x, y, z), une surface du sixième ordre ayant pour points quadruples A, B, C et pour droites doubles a, b, c. L'adjointe d'ordre deux de cette surface est constituée par le plan $t=0$ compté deux fois; la biadjointe est constituée par le plan $t=0$ compté quatre fois et, plus généralement, la surface i-adjointe, par le plan $t=0$ compté $2i$ fois.

Dans l'espace S_8, l'intersection du cône V_4^6 et d'une hyperquadrique est une variété V_3^{12} dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genres un. Suivant le premier théorème de M. Enriques rappelé au début, la section de la variété V_3^{12} par une hyperquadrique de S_8 est une surface projectivement canonique.

Cette surface a les genres $p_a = p_g = 9$, $p^{(1)} = 25$.

Liége, le 5 mars 1937.

---

[6] Scorza (*loc. cit.*).

M. HAYEZ, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.