EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*,
N° 1, 1933.

# Remarque sur certaines surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques,

par LUCIEN GODEAUX.

Les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques, étudiées par M. Demoulin [1] et par nous [2], sont caractérisées par le fait que, dans l'espace réglé, la suite de Laplace dont font partie les tangentes asymptotiques des deux modes de la surface, a la période six. Il existe une autre catégorie de surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques, l'un de ceux-ci étant fixe ; ces surfaces ont été rencontrées par M. Terracini [3] parmi celles dont les asymptotiques des deux modes appartiennent à des complexes linéaires ; ce géomètre en a donné les équations en termes finis Pour ces surfaces, qui sont isothermo-asymptotiques, la suite de Laplace dont il est question plus haut s'arrête dans les deux sens en présentant le cas de Laplace et ne comprend que quatre termes. Dans cette note nous retrouvons ces surfaces en exprimant que leurs quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques. Les directrices de Wilczynski d'une telle surface présentent les particularités suivantes : la première directrice passe par le point caractéristique fixe, la seconde se trouve dans un plan fixe passant par le point caractéristique fixe. Les points de rencontre des tangentes asymptotiques de la surface avec la seconde directrice de Wilczynski décrivent des réseaux transformés de Laplace l'un à l'autre ; les deux autres transformés de Laplace de ces réseaux sont fixes et coïncident avec le point caractéristique fixe. Il résulte de plus

(1) Sur la quadrique de Lie (*C. R.*, 1908, t. 147, pp. 493-496); Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques (*C. R.*, 1924, t. 179, pp. 20-22).

(2) Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1928, pp. 158-186, 345-348, 455-466).

(3) Sulle superficie le cui asintotiche dei due sistemi sono cubiche sghembe (*Atti della Soc. dei Nat. e Mat. di Modena*, 1919); Sulle superficie aventi un sistema, o entrambi, di asintotiche in complessi lineari (App. a la *Geometria proiettiva differenziale* de G. FUBINI et E. CECH, Bologne, 1927).

de nos raisonnements que si les quadriques de Lie d'une surface n'ont que deux points caractéristiques, le second de ceux-ci ne peut décrire une courbe.

**1.** Soit $(x)$ une surface non réglée, rapportée à ses asymptotiques $u, v$. Les coordonnées projectives homogènes de Wilczynski d'un point $x$ de la surface $(x)$ satisfont au système complètement intégrable

$$x^{20} + 2b\,x^{01} + c_1 x = 0,$$
$$x^{02} + 2a\,x^{10} + c_2 x = 0,$$

$a$, $b$ n'étant pas nulles.

A un point $x$ non parabolique de la surface $(x)$, attachons le tétraèdre de sommets $x$,

$$m = x\,(\log a)^{10} - 2x^{10}, \qquad n = x\,(\log b)^{01} - 2x^{01},$$
$$y = [8ab - (\log a)^{10}(\log b)^{01}]\,x + 2x^{10}(\log b)^{01} + 2x^{01}(\log a)^{10} - 4x^{11}.$$

Tout point de l'espace a des coordonnées de la forme

$$y_1 x + y_2 m + y_3 n + y_4 y\,;$$

$y_1, y_2, y_3, y_4$ sont les coordonnées locales de ce point.

**2.** Représentons par $Q$ l'hyperquadrique de $S_5$ image de l'ensemble des droites de l'espace ordinaire et soient U, V les points de $Q$ qui représentent les tangentes asymptotiques $xx^{10}$, $xx^{01}$ à la surface $(x)$, au point $x$. Ces points sont consécutifs dans une suite de Laplace L. Soient

$$U_1 = U^{01} - U\,(\log b)^{01}, \qquad V_1 = V^{10} - V\,(\log a)^{10}$$

les transformés de U dans le sens des $v$, de V dans le sens des $u$.

Le point $U_1$ est la seconde image dans $S_5$, du complexe linéaire osculateur au point $x$, à la développable dont l'arête de rebroussement est la ligne $u$ passant par le point $x$. Si ces courbes appartiennent à des complexes linéaires, $U_1$ ne dépend pas de $u$ et la suite L s'arrête au point $U_1$. On a

$$(\log b)^{11} = 4ab.$$

Si les courbes $v$ appartiennent également à des complexes linéaires, le point $V_1$ ne dépend pas de $v$ et on a

$$(\log a)^{11} = 4ab.$$

On sait que les points $U_1$, lorsque $v$ varie, et $V_1$, lorsque $u$ varie, engendrent des courbes planes, situées dans les plans conjugués par rapport à $\underset{\sim}{Q}$. Ces plans coupent $\underset{\sim}{Q}$ suivant deux coniques qui représentent les génératrices des deux modes d'une quadrique $\Phi_1$, fixe, que les quadriques de Lie $\Phi$ de la surface $(x)$ touchent en quatre points.

Pour que la quadrique $\Phi_1$ dégénère en un plan compté deux fois, il faut que les droites $U_1 U_1^{01}$, $V_1 V_1^{10}$ touchent $\underset{\sim}{Q}$. Cela entraîne

$$\alpha = 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^2 + 4(b^{01} + c_1) = 0,$$

$$\beta = 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_2) = 0.$$

On a alors

$$U_1^{02} + U_1^{01}(\log b)^{01} + 2a V_1^{10} = 0,$$

$$V_1^{20} + V_1^{10}(\log a)^{10} + 2b U_1^{01} = 0.$$

La droite $U_1 U_1^{01}$ touche $\underset{\sim}{Q}$ en $U_1^{01}$ et la droite $V_1 V_1^{10}$ en $V_1^{10}$. La quadrique $\Phi_1$ est formée du plan support du faisceau de rayons représenté sur $\underset{\sim}{Q}$ par la droite $U_1^{01} V_1^{10}$. Ce faisceau de rayons a pour centre le point $y$, seconde intersection de la quadrique de Lie $\Phi$ avec la première directrice de Wilczynski $r$ de la surface $(x)$ au point $x$. On a d'ailleurs

$$2y^{10} + y(\log a)^{10} = 0, \qquad 2y^{01} + 2y(\log b)^{01} = 0,$$

qui montrent que le point $y$ est fixe.

Les points $U_1^{01}$ $V_1^{10}$ représentent respectivement les droites $ny$, $my$ et par suite le plan $ymn$ est fixe.

**3** La seconde directrice de Wilczynski de la surface $(x)$ est la droite $s = mn$. On a

$$2m^{10} + m(\log a)^{10} + 4bn = 0, \quad 2m^{01} - m(\log b)^{01} - y = 0,$$

$$2n^{10} - n(\log a)^{10} - y = 0, \quad 2n^{01} + n(\log b)^{01} + 4am = 0.$$

Le point $m$ satisfait aux trois équations

$$4m^{20} - 4m^{10}(\log b)^{01} + 8bm^{01}$$
$$+ m\left[2(\log a)^{20} - \overline{(\log a)^{10}}^2 - 2(\log a)^{10}(\log b)^{01} - 4b^{01}\right] = 0,$$

$$4m^{11} - 2m^{10}(\log b)^{01} + 2m^{01}(\log a)^{10} - m\left[8ab + (\log a)^{10}(\log b)^{01}\right] = 0,$$

$$4m^{02} - m\left[2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^2\right] = 0,$$

ce qui montre bien que le point $m$ appartient à un plan. La seconde équation montre que, dans ce plan, le point $m$ décrit un réseau et que le transformé de Laplace de $m$ dans le sens des $u$ est le point $n$, dans le sens des $v$, le point fixe $y$.

On établit de même que, dans le même plan, le point $n$ décrit un réseau et que ses transformés dans le sens des $u$ et des $v$ sont respectivement le point $y$ et le point $m$.

Si l'on pose

$$\overline{m} = \sqrt{a}\, m, \qquad \overline{n} = \sqrt{b}\, n,$$

on a

$$\overline{m}^{10} + 2\sqrt{ab}\, \overline{n} = 0, \qquad \overline{n}^{01} + 2\sqrt{ab}\, \overline{m} = 0,$$

et la droite $s = mn$ engendre, dans le plan, une congruence de Goursat.

Liége, 26 décembre 1932.

---

MARCEL HAYEZ, Imprimeur, 112, rue de Louvain, Bruxelles.